Misoppfatninger til sannsynlighet

En undersøkelse med diagnostiske oppgaver blant elever i ungdomsskolen

Thomas Thorsen

Masteroppgave i realfagsdidaktikk

UNIVERSITETET I OSLO

November 2009

Forord

I denne oppgaven har jeg undersøkt noen misoppfatninger elever i ungdomsskolen har innen emnet sannsynlighet. For å få til dette har jeg gjennomført en undersøkelse blant 484 elever på ungdomstrinnet. Å gjøre et slikt tidkrevende arbeid ved siden av full jobb har vært slitsomt, frustrerende og utfordrende. Det har likevel vært interessant og givende å lære mer om undervisning og forskning, og jeg er sikker på at det får innvirkning på min egen undervisningspraksis.

Min viktigste motivasjon for å starte på en slik oppgave som dette var hensynet til egen refleksjon og egenutvikling. På den tiden hvor jeg søkte på opptak til masterstudiet i realfagsdidaktikk, følte jeg at min egen praksis som lærer begynte å bli preget av rutine. Dette arbeidet har for meg derfor vært en måte å få inspirasjon til å utvikle egen undervisning.

Jeg vil rette en takk til professor Gunnar Gjone ved ILS som har vært min veileder i arbeidet med denne oppgaven. Han har vist tålmodighet overfor en som har jobbet i rykk og napp som deltidsstudent.

Til slutt vil jeg takke min far, Birger, som foruten å ha språkvasket det meste av oppgaven, har vært en pådriver for at jeg skal få oppgaven ferdig.

Oslo, november 2009.

Thomas Thorsen

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 KIM-prosjektet

Da jeg i januar 2007 for alvor begynte å jobbe med masteroppgaven, var det meningen at masteroppgaven skulle knyttes til KIM-DIGI. KIM står for *kvalitet i matematikkundervisningen*, og var et prosjekt i regi av Telemarksforskning ved Høgskolen i Telemark og Institutt for lærerutdanning ved Universitetet i Oslo. Prosjektet startet i 1993 og det ble utviklet hefter med diagnostiske tester og veiledninger til emnene tall og tallregning, måling og enheter, algebra funksjoner og geometri. Det å jobbe med, og utfordre, elevers feilforstillinger ved hjelp av oppgaver og prøver, som ikke først og fremst er laget for å rangere elever, har appellert til meg over lengre tid. Da min veileder Gunnar Gjone informerte meg om KIM-DIGI, hvor de diagnostiske testene i KIM-prosjektet skulle digitaliseres, vekte det min interesse. Våren 2007 var min deltagelse i KIM-DIGI basert på at jeg skulle utvikle diagnostiske oppgaver til emnet sannsynlighet. Dette var et emne det ennå ikke var utviklet et hefte til. Jeg skulle videre få tilgang til materiale fra utprøvingen på elever. Tidlig våren 2008 ble det klart at progresjonen i KIM-DIGI prosjektet var slik at jeg måtte prøve ut oppgavene i en egen undersøkelse, hvis jeg ville jobbe videre med emnet som hadde vekt min interesse.

1.2 Bakgrunn for valg av emne

Det å søke årsaken til at elever svarer feil, eller å finne årsaken til at elever systematisk misforstår, har interessert meg gjennom snart femten år som matematikklærer i ungdomsskolen. I samtale med andre lærere har dette blitt kalt feilforstillinger, systematiske feil, hverdagsforestillinger, feilforståelser og misoppfatninger. Uten å knytte det til fagdidaktisk teori har jeg ofte brukt didaktiske oppgaver i prøver og undervisning, selv om det ikke har vært gjennomgripende og systematisk. Slike oppgaver har gjerne kommet inn når elevene holder på med problemstillinger som jeg av erfaring vet er vanskelige for enkelte elever å forstå. Denne oppgaven har gitt meg en mulighet til å få et mer bevisst forhold til hvordan elever får feil begrepsstrukturer.

Det at jeg valgte å jobbe med misoppfatninger innen emnet sannsynlighet var mer tilfeldig. Valget av sannsynlighet skyldtes først og fremst at det var et av emnene som ennå ikke var behandlet i KIM, og at emnet ikke har vært viktig i min egen formelle utdanning.

Min hensikt med å gå i gang med en masteroppgave er egen pedagogisk utvikling. For fem år siden satt jeg på en forelesning om ansettelsesprosedyrer i regi av Utdanningsforbundet. Jeg husker ikke navnet på han som holdt forelesningen, men jeg bet meg merke i noe han hevdet. Han sa at lærere blir bedre med erfaring, men bare til et visst punkt. Det punktet var i følge ham 10 års erfaring i samme jobb. Med andre ord at man høyst sannsynlig er en bedre lærer etter ti års erfaring enn etter fem års erfaring, mens det ikke gjelder tjue års erfaring i forhold til ti års erfaring. For å utvikle seg videre må man forandre jobben eller skape utfordringer for seg selv.

Siden jeg innledningsvis jobbet med å utvikle et oppgavesett som skulle prøves ut på elever falt det naturlig å bruke kvantitativ metode i masteroppgaven.

1.3 Problemstillinger

Denne problemstillingen har styrt arbeidet med denne masteroppgaven:

- **Hvilke misoppfatninger kan elever i ungdomsskolen ha til emnet sannsynlighet?**

Gjennom et oppgavesett med diagnostiske oppgaver ønsker jeg å påvise et utvalg av misoppfatninger til emnet sannsynlighet. Oppgavene i oppgavesettet er utarbeidet ut fra eksisterende forskning og egne erfaringer. Oppgavesettet er ikke ment å dekke alle mulige misoppfatninger elever har til sannsynlighet, men representerer et utvalg. Utvalget begrenses av ting som oppgavesettets størrelse, hva ungdomsskoleelever kan forventes å kunne og erfaringer fra pilotering.

Med utgangspunkt i hovedproblemstillingen vil jeg diskutere følgende:

- Hvorfor får elevene slike misoppfatninger?
- Finner jeg de samme tendensene i min undersøkelse som er påvist i tidligere forskning?
- Er det forskjeller på svarene til elevene i 8.trinn og 10.trinn?

1.4 Gangen i oppgaven

Denne oppgaven er, foruten litteraturhenvisninger og vedlegg, delt inn i seks kapitler:

Kapittel 1 – Innledning:
Her begrunner jeg kort valget av tema for oppgaven, hva slags undersøkelse dette er, hvordan oppgaven er bygd opp, og hovedproblemstillingene som skal diskuteres i oppgaven er stilt opp.

Kapittel 2 – Diagnostiske oppgaver:
Et teorikapittel hvor begreper som misoppfatninger, konstruktivisme, diagnostisk undervisning og diagnostiske oppgaver blir beskrevet og definert.

Kapittel 3 – Misoppfatninger innen sannsynlighet:
Foruten litt kort historikk om kombinatorikk og klassisk sannsynlighet, er dette et teorikapittel der misoppfatninger innen først og fremst sannsynlighet er beskrevet. Noen vanlige misoppfatninger til kombinatorikk er også tatt med.

Kapittel 4 – Metode:
Jeg har valgt kvantitativ metode i min undersøkelse. I dette kapittelet begrunner jeg valget av metode, og beskriver metoden i forhold til min masteroppgave.

Kapittel 5 – Resultater og analyse:
Her går jeg gjennom resultatene av undersøkelsen. Misoppfatninger jeg fant i elevenes svar og begrunnelser blir beskrevet og diskutert.

Kapittel 6 – Oppsummering og konklusjon:

I dette kapittelet blir misoppfatningene og funnene fra kapittel 5 systematisert og diskutert opp mot aktuell teori fra kapitlene 2 og 3. Jeg vil også gjøre meg noen konklusjoner ut fra problemstillingene i innledningen.

2 Diagnostiske oppgaver

I dette kapittelet vil jeg ta for meg begreper som misoppfatninger og konstruktivisme. Disse begrepene er viktige med tanke på diagnostisk undervisning, og i utvikling av diagnostiske oppgaver. Jeg kommer ikke til å lage en historisk gjennomgang av alle læringsteorier, men konsentrere meg om det jeg mener er relevant i forhold til diagnostiske oppgaver.

> *"Elevene bygger i stor grad selv opp sin kunnskap, (...) Læring er noe som skjer med og i eleven. Undervisning er noe som blir gjort av noen andre."*
>
> (Kunnskapsløftet, 2006)

Sitatet over står i kunnskapsløftets generelle del, og det sier noe om hvilken plass konstruktivisme skal ha i norsk skole. Konstruktivisme er en bærebjelke i diagnostisk undervisning, og derfor også i KIM-prosjektet og i min oppgave.

2.1 Misoppfatninger

Når en elev oppgir et feil svar på en oppgave, kan det være mange ulike årsaker til at eleven har svart feil. Noen feilsvar kan skyldes ting som mangel på konsentrasjon, gjetting, leseferdigheter, eller andre forhold som kan skape tilfeldige feil. Andre feilsvar kan skyldes at eleven har lagd seg forestillinger som fungerer i én setting, men som genererer feil når de brukes i andre situasjoner. Det er den andre typen feilsvar som er mest interessant innen matematikkdidaktikken. Dersom man kan identifisere disse forestillingene, så kan man gjøre noe med dem, slik at de kan gi riktig svar i nye situasjoner.

Når du søker i en ordbok, vil du få en definisjon på ordet misoppfatning som ikke fullt ut representerer den definisjonen vi bruker når vi snakker om elevers misoppfatninger i skolen. I følge Bokmålsordboka defineres en misoppfatning som en: ”*gal oppfatning, misforståelse*” (Kunnskapsforlaget, 2005)

Ordboka setter altså nesten et likhetstegn mellom misoppfatninger og feil som følge av feil utgangspunkt. Det trekkes her i denne definisjonen liten sammenheng mellom feilen og den kvalitative årsaken til at man har et feil utgangspunkt. Innen fagdidaktikken i matematikk har vi et behov for å spisse definisjonen noe. Gard Brekke har her en definisjon som ofte brukes: *”Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for misoppfatninger.”* (Brekke, 1995)

Med andre ord er misoppfatninger systematiske feil, som følge av at eleven har en forklaringsmodell som ikke passer helt til situasjonen, eller som passer i en annen situasjon. Misoppfatninger som dette kan være lærerinitierte eller de kan være konstruert av eleven selv.

Et eksempel på misoppfatning rundt desimaltall kan være at eleven behandler sifrene bak komma som et helt tall. Eleven vil da lett se at 4,9 er større enn 4,8, men vil tro at 4,10 er større enn 4,9. Dersom det i undervisningen hovedsakelig fokuseres på desimaltall av lik lengde vil det gå lang tid før eleven blir utfordret på denne misoppfatningen. (Steinle, Stacey, Chambers, 2006).

Et eksempel på misoppfatning rundt representativitet i sannsynlighet: Dersom en familie får seks barn, så virker rekkefølgen GJJGJG mer sannsynlig enn JJJGGG eller GGGJJJ. For eleven virker den første muligheten mer representativ, siden fødsler skal være en tilfeldig prosess. Egentlig er jo alle 64 mulige rekkefølger like sannsynlige. (Shaughnessy, Bergman, 1993)

Hverdagsforestillinger eller språkforståelse kan også skape misoppfatninger. Det er en rekke ord som har en annen betydning i hverdagslivet enn i matematikkfaget, gjerne en strammere definisjon. Det kan være ord som mengde, låne, ta bort, minus, etc. (Kunnskapsdepartementet, 2000)

I eksemplene over og i talløse andre vil det som regel være eleven selv som konstruerer disse misoppfatningene i møte med nytt stoff. Ofte vil det likevel være læreren som, med viten og vilje, skaper slike ufullstendige tanker knyttet til begreper. Når man starter å lære om tall i første klasse, er tall det samme som hele positive tall. Dette er en bevisst pedagogisk strategi, at elevenes begreper skal utvides gradvis. Lærer må da vite hvilke begreper elevene har før innføring av nye. Dersom disse begrepene ikke utvides riktig, og elevene hopper over trinn i utviklingen, vil de få misoppfatninger som er vanskelige å fjerne. Det riktige svaret på spørsmålet om hvor mange tall det er mellom 0 og 10, vil derfor være forskjellig på ulike alderstrinn.

Det at ufullstendige begreper og misoppfatninger dannes er ikke noe som kan unngås, det er bare en naturlig del av elevenes naturlige utvikling. Det vi som lærere kan gjøre for å hjelpe til med å fjerne eller forandre dem, er å skape situasjoner hvor de gamle begrepene ikke fungerer lenger.

2.2 Konstruktivisme som læringsteori

Konstruktivisme er epistemologisk av natur, det er en erkjennelsesteori som sier noe om kunnskapens natur. Den kan da si noe om kunnskapsutviklingen hos både individer og vitenskapsfag. Når konstruktivismeteorier sier noe om hvordan kunnskap utvikles innen et fagfelt, er det en vitenskapsteori. Når den sier noe om hvordan individet utvider sin kunnskap, fungerer den som en læringsteori. Det er læringsteorien som er i fokus i dette kapittelet. *"Konstruktivisme går ut på at kunnskaper blir til gjennom en aktiv prosess, at de konstrueres."* (Sjøberg, 2004)

Konstruktivisme handler om at det er eleven som bygger sin egen kunnskap. En lærer kan vanskelig overføre sin egen kunnskap til sine elever, fordi de har helt ulik erfaringsbakgrunn. Eleven må hele tiden sette sammen inntrykk til en helhet, nye inntrykk må passe inn i tidligere erfaringer. Vi kan derfor ikke bare overta andres oppfatning av verden rundt oss, men vi må bygge vår egen forståelse. Ideen er at eleven selv aktivt konstruerer sin kunnskap i interaksjon med omgivelsene. Lærerens rolle blir å hjelpe eleven til å konstruere sin egen kunnskap.

> *"Det vil si at kunnskapen aldri er 'ferdig' – den må konstrueres på nytt hver gang den skal læres. Elevene tar ikke imot kunnskap, de konstruerer den. (...) Kunnskap kan bare forstås som resultat av menneskets arbeid, virksomhet eller tenkning i forhold til omverdenen."*
>
> (Imsen, 2005)

Mange forskere innen fagdidaktikk i dag har et konstruktivistisk syn på læring (Ringstad, 2007). Merkelappen konstruktivisme settes på et vidt spekter av læringsteorier som tar utgangspunkt i at vår evne til logisk tenkning er avhengig av den kunnskap og erfaring vi allerede har, og bør nærmest forstås som et paraplybegrep. Svein Sjøberg oppfordrer leserne av sin lærebok *Naturfag som allmenndannelse – en kritisk fagdidaktikk* til å konstruere sine egne versjoner.

> *"For en grunntanke i et konstruktivistisk syn på læring er at det først og fremst er når man er i tvil og i en viss indre konflikt at man aktivt søker å finne ut av ting."*
>
> (Sjøberg, 2004)

De to mest kjent konstruktivistiske læringsteoriene står Jean Piaget og Lev Vygotskij for. De er ofte fremstilt som motpoler, selv om de begge står for en konstruktivistisk tradisjon (Sjøberg, 2004). Hovedforskjellen er at de har litt ulike perspektiver for læring.

Piagets læringsteori kan kalles kognitiv konstruktivisme. Piaget skiller mellom to typer kunnskap. Figurativ kunnskap - det som blir lagret i hukommelsen som isolerte fakta og detaljer, og operativ kunnskap - de strukturer barnet lager for å samordne fakta til meningsfulle helheter. Det siste kalles kognitive skjemaer. For Piaget er da tenkning å manipulere med skjemaer. Piaget mente at barnet bygger kunnskapsstrukturer eller skjemaer gjennom tilpasning. Barnet forsøker å skape en likevekt mellom seg selv og miljøet, noe hun gjør ved enten å tilpasse seg selv til miljøet, eller tilpasse miljøet til seg selv. En slik tilpasning blir kalt *adaptasjon*, hvor de to tilpasningsprosessene over kalles *assimilasjon* og *akkomodasjon*. Begrepet assimilasjon brukes når nye inntrykk tilpasses og får plass i gamle skjema. Akkomodasjon brukes når nye inntrykk ikke passer inn i gamle skjema, og de gamle skjemaene må reorganiseres slik at de nye inntrykkene får plass. Denne prosessen krever aktivitet, konkrete fysiske handlinger. Språk og sosial samhandling er ikke en viktig del av Piagets teori, hans utgangspunkt er biologens.

Sosial konstruktivisme knyttes gjerne til Kenneth Gergen, og som læringsteori støtter den seg til språkets betydning og Vygotskijs teori (Imsen, 2005). For Vygotskij var læring ikke noe som bare skjedde i hodet på barnet, men noe som skjer i et sosialt samspill. Språket blir da det viktigste elementet i læring, selv om også ting som sosialt fellesskap og kultur spiller stor rolle. Intellektuell utvikling og tenkning har utgangspunkt i sosial aktivitet. Vygotskij skiller mellom det barnet kan klare alene og det han kan klare med hjelp. Forskjellen mellom de to nivåene kalles *den proksimale utviklingssonen*. Utgangspunktet for Vygotskij er psykologens. *"Undervisning i samsvar med et konstruktivistisk syn på læring, innebærer å legge til rette for aktiviteter der elevene får passende erfaringer for å bygge kunnskap."* (Fuglestad, 2003)

Dersom man har et konstruktivistisk syn på læring, bør det få konsekvenser for hvordan man driver undervisning. Et eksempel er Bruners *learning by discovery* der elevene skal oppdage kjernen i problemet eller faget, som de så kan bygge ut og nyansere gjennom nærmere undersøkelser. Imsen (2005) bruker Jerome Bruner som en representant for pedagogisk anvendelse av konstruktivisme, selv om han over tid har forandret seg mye som teoretiker. Bruner mener at ikke bare arbeidsformene, men også fagets innhold kan tilpasses elevens nivå. *"Et hvilket som helst fag kan undervises effektivt på en intellektuelt redelig måte til et hvilket som helst barn på et hvilket som helst utviklingstrinn."* (Bruner, 1960). Spiralprinsippet, som har blitt mye brukt innen matematikk, er et resultat av denne tenkningen.

Bruners undervisningsmetode blir gjerne kalt *induktiv metode* (discovery learning), mens motsatsen blir kalt *deduktiv metode* (reception learning). Noen ser på induktiv og deduktiv metode som metoder lærere bruker, mens andre ser på det som måter elever lærer på. Egentlig er det begge deler. (Imsen, 2005). Induktiv metode regnes som mye mer tidkrevende enn deduktiv metode. De to metodene går i motsatt rekkefølge:

Induktiv metode:

1. Eleven får presentert konkrete situasjoner, eksempler, fenomener.
2. Eleven skal så, med mulig veiledning og hint fra lærer, abstrahere og generalisere rundt fenomenene.
3. Eleven skal så forsøke å formulere regler.

Deduktiv metode:

1. Lærer formulerer regler.
2. Lærer forklarer og illustrerer med eksempler.
3. Eleven får oppgaver der prinsippet brukes i praksis.

Som nevnt i innledningen i kapittelet så skal konstruktivisme være et viktig grunnlag for norsk skole. Spørsmålet er om de metodene som brukes i dagens skole, bærer preg av dette. Torunn Nilsen Fossland hevder i sin hovedfagsoppgave at lærere med konstruktivistisk teorigrunnlag har undervisningsmetoder som ikke blir båret frem av dette. Hun argumenterer for at konstruktivisme har implikasjoner for undervisning. Jeg mener at det ikke er gitt at konstruktivisme krever noen radikal endring i forhold til tradisjonelle undervisningsformer, selv om det er klart at noen metoder er mer spisset mot det å tvinge fram konflikter mellom ny kunnskap og gammel kunnskap. De fleste undervisningsmetoder vil være egnet i riktig tidspunkt til å skape en opplevelse for eleven, og til å utfordre elevens forståelse av ulike fenomener. Gunn Imsen trekker fram David Ausubel som en talsmann for en kritikk av at konstruktivisme er nærmest synonymt med induktiv metode. Han mener at de to metodene gir like meningsfylt eller like meningsløs kunnskap, alt etter i hvilken grad stoffet har relevans til en kognitiv struktur hos eleven. Begrepet konstruktivistisk arbeidsmetode vil likevel oftest forstås som en induktiv metode.

"Den konstruktivistiske bølgen i pedagogikken har vært sterk i flere tiår, og har utvilsomt bidratt til å myke opp tusenvis av klasserom og gitt millioner av elever verden over en mer spennende skolehverdag. En skal likevel være klar over at også konstruktivistisk undervisning har sine fallgruver, og at ingen teori alene viser den eneste rette vei til praksis i skolen."

(Imsen, 2005)

I følge Gard Brekke (1995) så er de viktigste siktemålene ved en konstruktivistisk arbeidsmetode:

- Å legge til rette aktiviteter der elevene kan vinne erfaringer som de kan bygge kunnskapen på.
- Å gi elevene anledning til å stoppe opp underveis i arbeidet sitt for å reflektere over det de har utført, og det de har lært/funnet ut gjennom dette arbeidet.

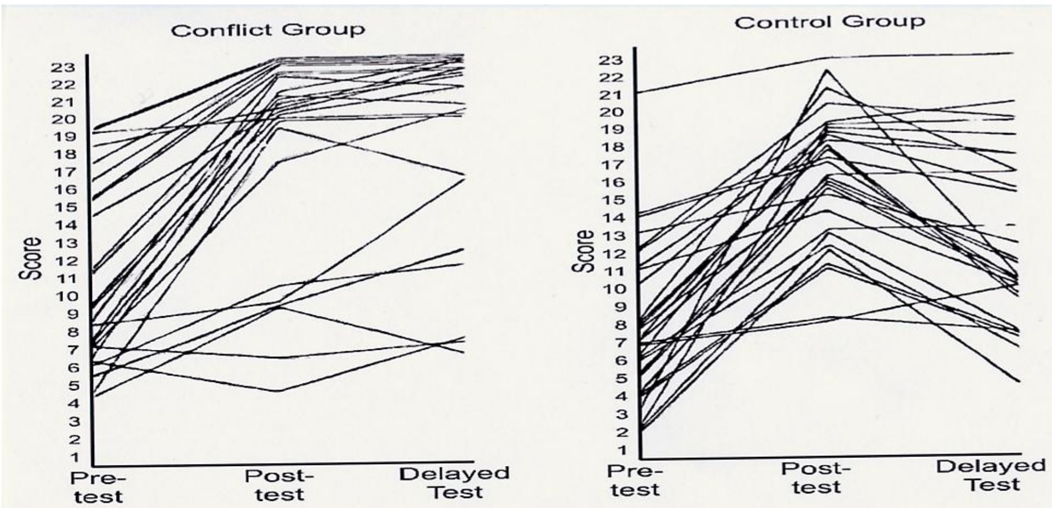
En arbeidsmetode som er utviklet nettopp for å oppfylle dette er diagnostisk undervisning.

2.3 Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning er arbeidsmetoder hvor hensikten er å skape konflikt mellom misoppfatninger og ny innsikt, slik at eleven gjennom refleksjon får en inngående forståelse av det de skal lære. Det finnes litt ulike oppskrifter på arbeidsmetoder for å oppnå dette. Jeg kommer til å kikke litt nærmere på to varianter av samme metode utarbeidet av Alan Bell (2007) og Gard Brekke (1995).

> *"Better long-term learning depends on developing a robust understanding with many connections to other topics and applications."*
>
> (Bell, 2007)

For Alan Bell er dette hovedargumentet for diagnostisk undervisning. Han henviser til forskning som viser at tradisjonell undervisning gir kortvarig gevinst, hvor elevene glemmer mye i løpet av kort tid etterpå. Figuren under viser hvordan testresultatene på to grupper elever utvikler seg over tid.



Figur 2.3.1 (Bell, 2007):Kontrollgruppen (control group) er elever som har jobbet etter tradisjonelle undervisningsmetoder, mens konfliktgruppen (conflict group) har fått undervisning hvor hensikten har vært å skape konflikt mellom misoppfatninger og ny innsikt.

Den ene gruppen har jobbet med diagnostisk undervisning (conflikt group), mens den andre har jobbet som vanlig, men uten å analysere feil (control group). Gruppen med diagnostisk undervisning har en tydelig bedre utvikling over tid.

Gard Brekke understreker det samme poenget: *"Et viktig krav til arbeidsmåten er at den skal sikte mot å bygge opp solide begreper som kan gi et godt grunnlag for langtidslæring."* (Brekke, 1995)

Solide begreper kan her vel forstås som noe av det samme som Bells *robust understanding*, hvor eleven har forstått begrepets plass i en begrepsstruktur, og kan bruke det i ulike situasjoner. Et *delvis begrep* er et dårlig utgangspunkt for full forståelse og langtidslæring.

Hensikten med å bruke denne metoden er å identifisere misoppfatninger og ufullstendige begreper hos eleven. I prinsippet baserer metoden seg på at det er mulig å kartlegge hvilke tanker elevene har gjort seg om lærestoffet før det er gjennomgått, slik at man avslører misoppfatninger og hindringer når de skal utvikle begreper i matematikken. Det å avsløre misoppfatninger er viktig ikke bare for å få til langvarig læring, men også for i det hele tatt å komme seg videre. Mange begreper i matematikken inngår i en begrepsstruktur, hvor de fleste begreper bygger på andre begreper. Når eleven har misoppfatninger, vil det ofte ikke holde med å undervise i det korrekte begrepet. Eleven må selv se hva som er feil med den måten han tenker på, slik at han kan forandre eksisterende begreper og bygge nye begreper.

Gard Brekke setter skjematisk opp diagnostisk undervisning som en arbeidsmetode med fire faser:

1. Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.
2. Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. En kaller dette å skape en *kognitiv konflikt*.
3. Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.
4. Bruke det utvidede (eller nye) begrepet i andre sammenhenger.

I fase en er diagnostiske oppgaver (kapittel 2.4) viktige hjelpemidler, og det er særlig dette det er fokusert på i denne oppgaven. Det finnes også andre metoder for å kartlegge elevens ufullstendige begreper og tanker rundt dem. Tilpasset undervisning, elevsamtaler, lærerlogg og mappevurdering er arbeidsmetoder som etter hvert har fått et innhold som i varierende grad vil kunne avklare elevenes begrepsforståelse og identifisere ufullstendige begreper. Felles for disse metodene er at de krever mer tid inn mot enkeltelevene.

Fase to skal fremkalle en kognitiv konflikt. Undervisningen har her som hensikt å gjøre eleven klar over at den løsningsstrategien han har, ikke produserer riktig svar. Selvmotsigelser som et resultat av at ulike metoder eller meninger brukes på et problem, vil gjøre eleven oppmerksom på at noe må gjøres med egne løsningsstrategier. Lærer skaper bevisst en situasjon der eleven møter problemstillinger som er slik at dersom eleven har en bestemt misoppfatning, så skal aktiviteten bringe denne misoppfatningen fram i dagen.

I fase tre skal det ledes fram mot ny innsikt og nye begreper. Dette oppnås gjennom diskusjon og refleksjon rundt motsetningene i fase to. I en klassesituasjon vil nok dette være en utfordring for en lærer. Det kan fort bli slik at elevene føler seg utlevert dersom de feile svarene blir presentert. Et poeng her blir å skape en forståelse av at å få feil og å prøve ut nye tanker er en naturlig del av det å lære matematikk. *"Det er viktig at elevene ser at det å ha misoppfatninger ikke er negativt"* (Gjone, Nortvedt, 2001)

Fase fire er en konsolideringsfase der elevene skal gis erfaringer med de nykonstruerte begrepene i ulike situasjoner og sammenhenger. Det er skapt en likevekt i de kognitive begrepsstrukturene. Det er likevel behov for en viss overlæring for at læring skal være varig.

2.4 Diagnostiske oppgaver

Diagnostiske oppgaver skal ikke brukes til å vurdere eleven i forhold til karakterer, tilbakemelding om nivå eller annen form for rangering. For å få til en fruktbar diskusjon og refleksjon i fase tre i den diagnostiske undervisning, så må det å svare feil på diagnostiske oppgaver bare være en naturlig del av matematikkundervisningen.

I en vanlig oppgave vil en elev bruke den læringsstrategien eleven føler er mest hensiktsmessig, og få et feil svar eller et riktig svar. Dette er ofte bra egnet til å konsolidere stoffet hos elevene, hvor de øver på å bruke innlærte løsningsstrategier. Måten oppgaven er gjort på, kan gi læreren en pekepinn om hvordan eleven har løst oppgaven, eller det kan være vanskelig å lese hvordan eleven har tenkt. Det som er spesielt med diagnostiske oppgaver er at de er designet spesielt for å avsløre misoppfatninger elevene kan ha. Slike oppgaver kan brukes både før, under og etter en undervisningssekvens, men i sammenheng med arbeidsmetoden diagnostisk undervisning tenker vi dem brukt før gjennomgangen. Oppgavene kan gjerne handle om ting som ikke er gjennomgått, men de må da være utformet slik at elevene kan ha ideer og tanker rundt dem. Elevene bør være forberedt på at de kan få flere feil på slike oppgaver enn vanlige oppgaver. De bør kjenne til hovedformålet med oppgavene, som i følge Gard Brekke (Brekke, 1995) er:

- Å oppdage hvilke tanker de har om ulike begreper.
- Å bli kjent med de vanskene som er knyttet til disse begrepene.
- Å hjelpe læreren med å planlegge undervisningen.

3 Misoppfatninger innen sannsynlighet

”Probability does not consist of mere technical information and procedures leading to solutions. Rather, it requires a way of thinking that is genuinely different from that required by most school mathematics. In learning probability, students must create new intuitions.”

(Fischbein, Schnarch, 1997)

I følge Fischbein og Schnarch (1997) så skiller den måten man må tenke på innen emnet sannsynlighet seg fra den måten man tenker på innen matematikkfaget i skolen. Elevene må bygge seg en ny kunnskapsstruktur basert på en ny type fornuft og analyse.

Sannsynlighet har en mengde ulike bruksområder innen praktisk talt alle vitenskaplige disipliner, noe som vel ikke kan sies om alle matematiske disipliner. Det gjennomsyrer også nesten alt vi gjør til daglig. I nyheter, værmeldinger, sportsendinger brukes sannsynlighet flittig, samtidig er de fleste matematiske elementene bak det som foregår, skjult.

”Probability is unusual in many respects. As a knowledge domain, it straddles mathematics in its pure abstractions, and physics, economics and indeed most sciences and social sciences because of its wide range of applicability. (...) Indeed it seems probability is one of the few areas of mathematics that informs explicitly the way in which we conduct our everyday lives.”

(Pratt, 2005)

Det å undervise i sannsynlighet blir da viktig for å forstå hendelser rundt oss, enten det dreier seg om politiske, sosiale, økonomiske, historiske eller fysiske hendelser.

3.1 Kombinatorikk

Kombinatorikk er en gammel matematisk disiplin, som sannsynligvis har eksistert lengre enn forståelsen av klassisk sannsynlighet. Det vil være naturlig at spillere i oldtiden og middelalderen, som spilte tilfeldighetsspill med terninger, ville oppdaget at bestemte resultater dukker opp oftere enn andre. Veien til å se at årsaken til dette ligger i hvilke kombinasjoner som gir hvilke svar er ikke nødvendigvis lang.

Carmen Batanero, Michel Henry og Bernard Parzysz (2005) refererer et manuskript, *De Vetula*, som angivelig er skrevet av Richard de Fournival, som levde i perioden 1201-1260. Manuskriptet inneholder et dikt der en del av det beskriver i detalj sammenhenger mellom mulige kombinasjoner, og forekomsten av resultater, i et terningspill med tre terninger. Dette diktet er det eldste skrevne eksempel som trekker en sammenheng mellom observert hyppighet og det å telle opp mulige kombinasjoner. Det samme problemet kan regnes som det første kjente sannsynlighetsproblemet som er løst i historien. Det ble gitt av Storhertugen av Toscana til Galileo Galilei rundt år 1620, hvor Galilei gav et komplett kombinatorisk bevis for riktig resultat. *"Combinatorics may be defined as principle of calculation involving the selection and arrangement of objects in a finite set."* (English, 2005)

Det er med utgangspunkt i terningspill som nevnt ovenfor at menn som Pascal og Fermat la fundamentet for teorier om sannsynlighet og kombinatorikk. Kombinatorikk er en betydelig komponent i matematikken, som utgjør en struktur av prinsipper som danner grunnlag for disipliner som for eksempel sannsynlighet. (English, 2005)

"Simple combinatorics is the backbone of elementary probability and our teaching of probability should take account of this fact." (Freudenthal, 1973) Videre utover i kapittelet kommer jeg tilbake til begrepet sannsynlighet, men det sier seg selv at det å finne antallet mulige kombinasjoner, blir en naturlig del av det å regne med sannsynlighet. Kombinatorikk

er en disiplin med egne utfordringer og innhold, som i mange sammenhenger blir en forutsetning for å kunne regne med sannsynlighet.

3.2 Klassisk sannsynlighet

Mennesker har til alle tider forsøkt å forutse mulige følger av ulik atferd og hendelser. Ulike utfall har sikkert vært observerbare og forståelige, uten at de har kommet til en matematisk forståelse av hvorfor. *"The theory of probabilities is at bottom nothing but common sense reduced to calculus."* (Laplace, 1825) Den nære sammenhengen mellom sunn fornuft og sannsynlighet kan være opphav til mange misoppfatninger innen sannsynlighet.

Et spørsmål man kan stille seg er hvorfor det historisk sett tok lang tid før sannsynlighet som matematisk disiplin ble opprettet. Utover vanskene med å måtte lage teorier knyttet til dagligdagse hendelser, så har kunnskapen om framtiden vært religionens og overtroens domene. Å kunne forutse fremtiden blir da utenkelig. Et unntak fra religiøse og "overtro"-forklaringer er Aristoteles forklaringsmåte. Aristoteles regnet med fire årsaker til at ting skjedde. En slik årsak var *formålsårsaken*. I dette begrepet lå en forståelse av at alt skjedde med en bestemt hensikt. En av årsakene til at det regnet, var at plantene trengte vann. Han så det også slik at alle ting/vesener strebet etter å realisere sine muligheter. Fremtiden kunne altså forutses gjennom de iboende muligheter. (Eriksen, 1985)

Ulike typer terninger har eksistert siden de første assyriske, sumeriske og egyptiske sivilisasjonene. Vitenskaplige ideer rundt tilfeldighet var likevel fraværende helt fram til middelalderen, selv om noe forståelse rundt kombinatorikk har eksistert. Terningspill var for eksempel en vanlig forlystelse i det gamle Roma. Først etter renessansen begynner en rekke forfattere og forskere som Pascal, Huygens, Leibniz, Fermat, Moivre å skape en terminologi og definere begreper rundt sannsynlighet. (Batanero, Henry, Parzysz, 2005)

Pierre-Simon Laplace publiserte sin *Essai Philosophique sur les Probabilités* i 1814. Dette verket regnes som en fundamental bok når det gjelder klassisk sannsynlighet. Han tok utgangspunkt i at for å kunne regne med sannsynlighet, må vi dele hendelsene opp i tilfeller med lik sannsynlighet:

> *"The theory of chance consist in reducing all events of the same kind to a certain number of equally possible cases, that is to say, to such as we may be equally undecided about in regard to their existence,"*
>
> (Laplace, 1814)

Og han lagde følgende definisjon som det første prinsipp:

> *"probability is thus simply a fraction whose numerator is the number of favourable cases and whose denominator is the number of all cases possible."*
>
> (Laplace, 1814)

En forutsetning for denne definisjonen er at man trekker ut fra et utvalg, der alle mulige trekninger ut fra utvalget har like stor sannsynlighet. Dette er en subjektiv fortolkning eller forenkling, så lenge det ikke er situasjoner i naturen der alle mulige utfall i et utvalg gir den samme sannsynligheten. Denne definisjonen er noe av det første skolebarn i Norge møter når de skal lære å regne med sannsynlighet.

"Når vi ønsker å finne sannsynligheten for flere gunstige utfall, har vi at sannsynligheten er lik $\frac{antall\ gunstige\ utfall}{antall\ mulige\ utfall}$*. Dette gjelder når det er samme sannsynlighet for hvert enkelt utfall."* (Nye Mega 8B, 2006)

3.3 Misoppfatninger innen kombinatorikk

Dubois (1984) klassifiserte enkle kombinatoriske oppgaver eller problemer i tre modeller: utvelgelsesmodellen (selection), fordelingsmodellen (distribution) og oppdelingsmodellen (partition), som er forklart under, med et eksempel på en oppgave til hver. De tre oppgavene som står under, er et eksempel til hver modell fra et oppgavesett som ble gitt til syv hundre elever i 14-15 års alder av Batanero, Godino og Navarro-Pelayo. (Batanero, Sanchez, 2005)

Utvelgelsesmodellen: det trekkes *n* trekninger fra et uvalg av *m* objekter, som gjerne er entydig definert fra hverandre.

> Oppgave 1: Det er fire nummererte klinkekuler i en eske, med numrene 2, 4, 7 og 9. Vi trekker en klinkekule og skriver nummeret ned før vi legger den tilbake i esken. Vi fortsetter å trekke og legge tilbake inntil vi har fått et tall med tre sifre. Hvor mange forskjellige tall med tre sifre kan vi få på denne måten. Ett eksempel på et slik tall kan være 222.

Fordelingsmodellen: m objekter fordeles på n plasseringer.

> Oppgave 2: Vi har tre like brev, som vi ønsker å legge i konvolutter av forskjellig farge. Det er fire konvolutter med fargene gul, blå, rød og grønn. På hvor mange forskjellige måter kan tre like brev bli lagt i fire forskjellige konvolutter? Ett eksempel kan være at vi plasserer et brev i den gule konvolutten, et annet i den blå og det siste i den grønne.

Oppdelingsmodellen: m objekter fordeles på n undergrupper, som kan inneholde mer enn en type objekt.

> Oppgave 3: Mary og Cindy har fire klistremerker med numrene fra 1 til 4. De fordeler klistremerkene mellom seg, med to til hver av dem. På hvor mange måter kan de fordele klistremerkene mellom seg. Ett eksempel er at Mary fikk de med numrene 1 og 2, mens Cindy fikk de med 3 og 4.

Batanero og Sanchez (2005) lister opp åtte ulike typer av misoppfatninger som er knyttet til disse tre modellene. Det er verdt å merke seg at de fant at de tre problemene til utvelgelses-, fordelings- og oppdelingsmodellen ikke hadde samme vanskegrad, selv etter formell undervisning i kombinatorikk. Utvelgelsesproblemer var betydelig lettere enn de to andre. De åtte typene med misoppfatninger knyttet til de tre modellene var:

Feil rekkefølge (Error of order): Når elevene ikke kan se når rekkefølgen er viktig eller ikke. For eksempel dersom de tror at rekkefølgen på frimerkene har noe å si i oppgave 3.

Gjentagelsesfeil (Error of repetition): Når eleven ikke tar hensyn til tilbakelegging, eller ikke tilbakelegging. For eksempel dersom elever på oppgave 1 systematisk utelater kombinasjoner som 444, 443, 442, etc., eller dersom elever på oppgave 2 bruker samme farge flere ganger.

Blander sammen hva slags ting som brukes: (Confusing the type of object): Når elever prøver å skille mellom ting som er like, eller ikke skiller mellom ting som ikke er like. For eksempel dersom elever prøver å holde greie på hvilket brev som går i hvilken konvolutt i oppgave 2, selv om det står i oppgaven at brevene er like.

Utelate noen elementer før de setter opp kombinasjoner (Excluding some elements to form the configuration): For eksempel dersom elevene får en oppgave av denne typen. Finn alle kombinasjonene av bokstavene A, B, C, C, C. De vil da utelate to av C'ene, og finne ulike kombinasjoner av bokstavene A, B og C.

Usystematisk oppramsing (Nonsystematic listing): Elevene har her ramset opp ulike riktige kombinasjoner, uten at de er i noen spesiell rekkefølge, samtidig som de har utelatt enkelte. Det vil si at de gjerne har brukt en prøve og feiletaktikk, uten å bruke en systematisk metode som fører til alle kombinasjonene.

Ikke husker formelen når eleven har funnet riktig regneoperasjon. (Not remembering the correct formula for a combinatorial operation that has been correctly identified).

Blander sammen ulike verdier inn i formler (Not remembering the meaning of values of parameters in the combinatorial formula): For eksempel dersom eleven bytter om m nummererte klinkekuler med n trekninger i oppgave 1, dersom de bruker en formel.

Feil bruk av trediagrammet (Faulty interpretation of the tree diagram): Når elever enten bruker trediagrammet feil, eller tolker trediagrammet feil.

I grunnskolen i Norge brukes det ikke mye formelle formler innen kombinatorikk, noe som gjør at de to typene misoppfatninger som dreier seg om å bruke formler feil ikke er så aktuelle på dette nivået i skoleverket. Det gjelder ”*ikke husker formelen når eleven har funnet riktig regneoperasjon”*, og ”*blander sammen ulike verdier inn i formler”*. De andre misoppfatningene er høyst aktuelle, inklusiv feil bruk av trediagram, som blir mye brukt i norsk skole.

3.4 Forskning på elevers forståelse av sannsynlighet

> *”But if we cannot deny that there is an intuition of probability in the normal civilized adult, and if we cannot correctly compare the role of this intuition to that of several practical operations such as numbers and space, there are nevertheless two questions which must be asked at the start: Is such an intuition in-born or does it develop later and, if so, how is it acquired?”*
>
> (Piaget og Inhelder, 1975)

Forskning på hvordan elever utvikler sin forståelse av sannsynlighet, og på undervisning og læring av sannsynlighet, er ikke en gammel disiplin. Det meste av slik forskning har foregått i løpet av de siste 50 årene. En stor del av denne forskningen har på ulike sett befattet seg med de spørsmålene Piaget og Inhelder stiller i sitatet over. Graham A. Jones og Carol A Thornton (2005) deler disse femti årene inn i tre faser:

1. Piagetperioden (the Piagetian Period)
2. Etter-Piagetperioden (the Post-Piagetian period)

3. Den moderne perioden (the Contemporary Period).

Fase 1-piagetperioden: I den første perioden ble forskningen utført av Piaget , Inhelder og andre psykologer på 50 og 60 tallet. *"This early work focused on the developmental growth and structure of peoples probabilistic thinking and intuitions. It also examined the patterns of responses exhibited by children and adults when they were faced with randomly generated prediction tasks…"* (Jones, Thornton, 2005). Fokus her er altså på hvordan folks skjema for sannsynlighet utvikler seg med alder, og kartlegging av folks reaksjoner på ulike sannsynlighetsoppgaver. Selv om disse psykologene ikke utførte sin forskning med tanke på sannsynlighet som en del av skolens pensum, så har de med Piaget i spissen, inspirert mye av senere forskning.

Fase 2-etter piagetperioden: Etter denne første perioden kommer en periode, hovedsakelig på 70 og 80 tallet, hvor det forskes på undervisning og læring innen sannsynlighet, selv om emnet ennå ikke har fått en fremtredende plass i skoleverkets pensum. Det blir fokusert på blant annet utvikling av begrepsdannelse og intuisjon innen sannsynlighet, hvilke strategier og heuristiske metoder folk bruker for å ta valg, forskning på studenters tenkning på sannsynlighet før og etter undervisning.

Fase 3-den moderne perioden: Ulike reformer og innføring av nye læreplaner i mange land, hvor sannsynlighet har fått en tydeligere plass i planene, har ført til en økning i forskningen på læring og undervisning innen sannsynlighet. Fokuset på forskning har beveget seg mot fagets innhold og klasserommet. *"In a real sense the learning research of this phase has been driven by the need to provide teachers with an awareness of the probabilistic knowledge and beliefs that students in various grades bring to the classroom…Research has also begun to focus on students collective thinking in instructional settings."* (Jones, Thornton, 2005).

3.5 Misoppfatninger innen sannsynlighet

Sannsynlighet er et emne hvor de matematiske teoriene skal beskrive hendelser som kan være helt dagligdagse. Folk vil ha forståelser og forventninger rundt slike hendelser før de lærer matematikken i dem. Man kan da forvente at emnet sannsynlighet er en del av matematikken der vi vil møte en stor hyppighet av misoppfatninger hos elevene. Elever tyr gjerne til misoppfatninger når de blir konfrontert med et problem de enten mangler forutsetning for å løse, eller som de ikke setter av tid og krefter nok til å løse korrekt. Misoppfatninger kan både komme av at eleven har misforstått elementer i den formelle regningen, eller komme fra egne erfaringer.

3.5.1 Heuristiske misoppfatninger

Både Tversky, Kahneman (1974) og Shaugnessy, Bergman (1993) hevder at folk som har mangelfull kunnskap innen det matematiske emnet sannsynlighet vil beregne utfallet av en hendelse ved hjelp av heuristiske metoder. Heuristisk må her forstås som en, gjerne uformell, metode for å løse et problem. Tommelfingerregler, intuisjon, sunn fornuft, ”educated guesses” kan være slike problemløsningsmetoder. I Wikipedia finner man følgende definisjon: *”…heuristic stand for strategies using readily accessible though loosely applicable information to control problem-solving in human beings and machine.”* Siden de gjerne er basert på erfaringer så kan heuristiske metoder være en rask og effektiv måte å komme fram til en løsning på når hendelsen stemmer med tidligere erfaringer, eller når man sitter med ufullstendig informasjon. I gitte situasjoner vil derimot heuristiske metoder generere systematiske feil og misoppfatninger. Tversky og Kahneman fokuserer på tre grupper av slike heuristiske metoder eller strategier som kalles *heuristisk representativitet* (representativeness heuristic), *heuristisk tilgjengelighet* (availability heuristic) og *tilpassing og forankring* (adjustment and anchoring).

3.5.1.1 Heuristisk representativitet:

Elever som bruker heuristisk representativitet, vurderer sannsynlighet ut fra om en hendelse er typisk i forhold til forutgående hendelser. Sannsynligheten blir vurdert ut fra et forventet kjent fenomen, og det antas at hendelsen blir lignende.

”According to the representativeness heuristic, people tend to make decisions about the likelihood of an event based upon how similar (i.e. representative) the event is to the distribution from which it was drawn, or upon how similar the event is to the process by which the sample space is generated.”

(Shaughnessy , 1977)

Når man slår mynt og kron med en vanlig mynt, har de fleste elever en intuitiv forståelse av at sannsynligheten for mynt og kron er like stor, de vil forvente at det blir like mange mynt som kron. Dersom elever bruker heuristisk representativitet i oppgave 1 under, så kan de synes at påstand b er mer representativ enn de andre, fordi det der er like mange mynt som kron. En årsak til denne misoppfatningen er mangelfull forståelse av *loven om store tall*. Elevene forventer at utfallene fordeler seg noenlunde likt uansett om det er få eller mange utfall. På samme måte fører dette til at elever som bruker heuristisk representativitet, vil velge svaralternativ c i oppgave 2.

Oppgave 1:

Ellen og Pål slår kron og mynt ti ganger hver.

Resultatet ble slik:

Ellen: M M M M M K M M K M

Pål: M K K M K K M M K M

Hvilke påstander er riktig:

a. Ellens resultat er mest sannsynlig.

b. Påls resultat er mest sannsynlig.

c. Begge resultatene er like sannsynlig

Oppgave 2:

Marthe slår kron og mynt fire ganger. Hun får 3 mynt og 1 kron.

Kristoffer slår også kron og mynt, men holder på lengre. Han slår 40 ganger, og får resultatet 30 mynt og 10 kron.

Du skal nå avgjøre hvilke av disse to eksemplene som er mest sannsynlig.

a. Det er mest sannsynlig at Marthe får 3 mynt på 4 kast.

b. Det er mest sannsynlig at Kristoffer får 30 mynt på 40 kast.

c. Begge eksemplene er like sannsynlig.

Kahneman og Tversky brukte en variant av oppgave 2, med sannsynligheten for å føde gutter eller jenter på et stort og et lite sykehus, på collegeelever. Litt over halvparten av elevene svarte et alternativ som tilsvarer c i oppgave 2. Et stort antall av elevene har da ikke forstått *loven om store tall*. Loven om store tall er prinsippet om at dersom et forsøk gjentas mange ganger så vil fordelingen av resultatene nærme seg den teoretiske sannsynligheten. I oppgave 2 er den teoretiske sannsynligheten 0,5. Når du da slår mynt og kron mange ganger vil du forvente at fordelingen mellom mynt og kron nærmer seg likt. Representativitet kan også føre til at elevene mener at også fordelingen av hendelsene helst skal representere prosessen. Av disse to rekkefølgene fra et myntkast: MKMKMK og MMMKKK, så vil da den andre rekkefølgen ikke virke representativ for den tilfeldige prosessen det er å slå kron og mynt.

Oppgave 3:

Hanne slår mynt og kron med et kronestykke. Hanne får mynt de seks første gangene hun slår. Når hun så skal slå den syvende gangen, hva er da riktig?

a. Sannsynligheten er størst for at Hanne får mynt.

b. Sannsynligheten er størst for at Hanne får kron.

c. Sannsynligheten er like stor for at Hanne får mynt eller kron.

En typisk misoppfatning som følge av heuristisk representativitet er at trekninger som allerede har skjedd har innvirkning på neste trekning. I oppgave 3 vil en slik misoppfatning føre til at elevene svarer a eller b. En elev som tror at nå er det på tide med kron, og derfor svarer b, kompenserer da slik at resultatene fra alle trekningene skal nærme seg sannsynligheten for hvert enkelt utfall. Dette kan på norsk kalles *negativt tilbakeblikk* (negative recency eller gambler's fallacy). Dersom eleven hadde svart a, fordi han tror at når det først har begynt med mynt etter mynt så fortsetter det gjerne, så kan det på norsk kalles *positivt tilbakeblikk* (positive recency). En variant av positivt tilbakeblikk er *vinnerhandsfenomenet* (*the hot hand phenomenon)*, som er når man tror at man vil fortsette å vinne fordi man allerede har vunnet noen ganger på rad.

Det kan være verdt å merke seg at misoppfatninger av disse typene er seiglivet. Batanero og Sanchez (2005) refererer en undersøkelse med tilsvarende oppgaver som nevnt ovenfor. Eldre elever gjorde det bare marginalt bedre enn yngre elever. På universitetsnivå er disse misoppfatningene vanlige blant studenter, også etter formell undervisning i emnet sannsynlighet.

Shaughnessy og Bergman trekker fram drosje-problemet for å beskrive en form for heuristisk representativitet som blir kalt 'base-rate neglect' eller ' the base rate fallacy'.

"A cab was involved in a hit-and-run accident at night. There are two cab companies that operate in the city, a Blue Cab company and a Green Cab company. It is known that 85% of the cabs in the city are Green and 15% are Blue. A witness at the scene identified the cab involved in the accident as a Blue cab. This witness was tested under similar visibility conditions, and made correct colour identifications in 80% of the trial instances. What is the probability that the cab involved in the accident was a Blue cab rather than a Green one?" (Shaughnessy og Bergman, 1993)

I undersøkelser har folk en tendens til å ignorere den underliggende opplysningen om fordelingen mellom blå og grønne drosjer, og i stedet sette sin lit til vitneforklaringen. Denne underliggende informasjonen kaller Shaughnessy og Bergman for basisrate informasjon. Det at det bare er 15 % blå drosjer i byen, gjør at sannsynligheten for at det var en blå drosje i utgangspunktet er lav. Mange svarer her at det er høy sannsynlighet for at det var en blå drosje fordi det svaret representerer den høye påliteligheten til vitnet. Når man regner på det, oppdager man at det ikke er tilfelle. Tabellen under viser forholdet mellom antall blå/grønne drosjer og riktig/feil vitneforklaring, dersom det var 100 biler i byen.

Figur 3.1: Forholdet mellom antall blå/grønne drosjer og riktig/feil forklaring.

	Riktig vitneforklaring (80 %)	Feil vitneforklaring (20 %)
15 blå drosjer (15 %)	12	3
85 grønne drosjer(85 %)	68	17

20% feil svar med grønne drosjer er mer enn 80% riktig svar på de blå. Sannsynligheten for at det er en blå drosje når vitnet svarer at hun/han så en blå drosje blir da: 12/29=0,41.

Alle feilsvarene på denne oppgaven kan ikke forklares ut fra heuristisk representativitet alene. Ett eksempel på det er når testpersonen sier at sannsynligheten er 100 % for at drosjen er blå. En forklaring på dette kan være at noen mennesker ser på det som sin oppgave å avgjøre hva som er riktig svar, i stedet for å vurdere hva som er mest sannsynlig, noe som kan kalles løsningstilnærming (outcome approach).

3.5.1.2 Heuristisk tilgjengelighet:

Når folk baserer sine bedømminger av sannsynligheten for en hendelse på hvor lett det er for dem å komme på bestemte tilfeller av denne hendelsen, sier vi at de benytter heuristisk tilgjengelighet. (Shaughnessy, Bergman, 1993) Fordi elever kan finne på å vurdere sannsynlighet ut fra egne mangelfulle erfaringer, egne opplevelser eller eget perspektiv, så kan denne kategorien av heuristiske strategier generere mange misoppfatninger. For eksempel dersom en elev blir bedt om å uttale seg om skilsmissestatistikk eller sannsynligheten for å havne i en bilulykke, så vil gjerne svaret farges av elevens erfaringer. Eleven vil gjerne basere svaret på hvor mange skilsmisser eller bilulykker de selv, venner eller familie har opplevd eller vært innblandet i. En person som har kollidert med bilen tre ganger i Oslo vil mene at sannsynligheten for å havne i bilulykker i Oslo er ganske stor, mens en som aldri har kollidert i Oslo, kan mene at sannsynligheten for å kollidere i Oslo er liten. Kahneman og Tversky hevder at heuristisk tilgjengelighet skaper misoppfatninger innen sannsynlighet. Dette på grunn av at folk har en tendens til å tro at de hendelsene de lett husker, også er de hendelsene som har størst sannsynlighet for å oppstå. I følge Jones og Thornton (2005) har det foreløpig ikke vært mye forskning på hvordan elever bruker heuristisk tilgjengelighet. Lærere bør likevel være kjent med fenomenet for å hjelpe hver enkelt. Jeg vil anta at i diagnostiske oppgaver vil det være en del feilsvar som ikke lett kan kategoriseres, som vil ha sin årsak i heuristisk tilgjengelighet. Slike misoppfatninger vil jo være svært varierte da de oppstår av elevenes egne erfaringer og opplevelser. Selv om de kan være vanskelig å diagnostisere, så er de ikke uvesentlige:

> *”There is indeed cause for concern in how availability may affect our judgement. When diagnosing a disease, a physician draws on past experience. It may be easier to recall instances in which the symptoms and disease occur together than to remember counterexamples, where either certain symptoms or the disease occurred separately.”*
>
> (Shaughnessy, Bergman, 1993)

3.5.1.3 Tilpassing og forankring

Tanken er at folk starter ut fra en opplysning (et anker), som et utgangspunkt for en mangelfull vurdering av sannsynligheten, som så justeres ut fra opplysninger som er gitt i oppgaven, før de kommer fram med et forslag til løsning.

“People who use this heuristic make inadequate probability estimates by starting from an initial value that has been adjusted on the basis of information given in the problem.” (Tversky, Kahneman, 1974). To eksempler på denne heuristiske metoden er konjunksjonsfeil

(*conjunction fallacy)* og disjunksjonsfeil (*disjunction fallacy).* Elever bruker konjunksjonsfeil når de tror at sannsynligheten for at to hendelser inntreffer er større enn for at en av hendelsene inntreffer. Eksempelvis oppstår da feilforestillingen at det er større sannsynlighet for to seksere etter hverandre med en terning, enn en sekser på neste kast. I motsatt fall vil en elev som bruker disjunksjonsfeil ende opp med feilforestillingen at det er større sannsynlighet for å få seks på ett kast enn minst en sekser på tre kast. Fischbein og Schnarch (1997) gjennomførte en undersøkelse med syvende og niendeklasseelever der elevene får presentert følgende scenario: Dan drømmer om å bli doktor, han liker å hjelpe folk, han var frivillig i Røde kors, og han tjenestegjorde i Hærens sanitet før han begynte på universitetet. Elevene skulle så vurdere hva som var mest sannsynlig av følgende utsagn: a) Dan studerer til å bli lege; b) Dan er student. 70 % av syvendeklassingene og 80 % av niendeklassingene svarte alternativ a). Et annet eksempel kan være at i opinionsundersøkelser før valget om Norge skulle søke om medlemskap i EU i 1994, svarte flere at det var større sjanse for at Sverige og Norge sier ja til medlemskap, enn at Norge sier ja. Watson (2005) hevder at det er i sosiale sammenhenger elever er mest tilbøyelige til å bruke konjunksjonsfeil. Loven om konjunksjon innebærer at sannsynligheten for at to ulike hendelser inntreffer samtidig er mindre enn sannsynligheten for en av dem inntreffer. Watson hevder at selv om loven om konjunksjon er blitt gjennomgått i klasserommet, så innebærer ikke det at elevene er i stand til å overføre kunnskapen til sammensatte sosiale sammenhenger utenfor skolen. Loven om konjunksjon: $p(A \cap B) \leq p(A)$. Med andre ord at sannsynligheten for at to ting skal skje samtidig er mindre enn eller er lik sannsynligheten for at den ene tingen skjer.

3.5.2 Begrepet tilfeldighet

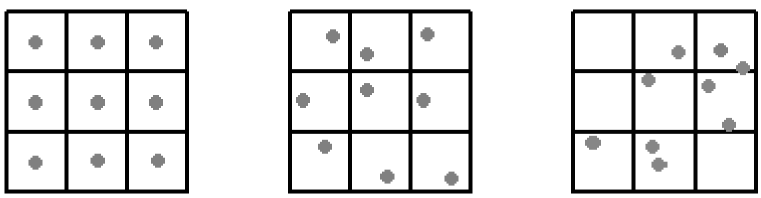
I *"The Origin of the Idea of Chance in Children"* skrev Piaget og Inhelder:

"Nothing is more common . . . than the form of distribution which drops of rain give when falling fortuitously at the beginning of a small shower . . . Will the subjects not have, in this phenomenon familiar to all of them, a special chance of understanding intuitively the law of large numbers?" (Piaget og Inhelder, 1975)

Piaget og Inhelder hevder altså at forståelsen av tilfeldighet i et slikt naturlig fenomen er selvinnlysende. David R. Green gjennomførte i 1986 en undersøkelse hvor en slik oppgave ble gitt til 1600 barneskoleelever i alderen 7-11 år. En av oppgavene som ble gitt var av typen som er gjengitt i oppgave 4.

Oppgave 4

> En gutt har lekt med treklosser ute. Da han slutter å leke har han satt sammen ni klosser til et kvadrat. Etter en stund begynner det å regne. Det du skal tenke på er hvor de ni første regndråpene som treffer klossene havner. Under er det tegnet tre mulige forslag.
>
> Etter at ni dråper har falt, hvilke av de tre forslagene under ser mest ut slik du vil forvente?



A B C

Forslag A representerer en ikke-tilfeldig regelmessig fordeling, mens forslag C representerer en tilfeldig fordeling. Regndråpene i B er tilfeldig plassert innen hvert kvadrat, men det er en regndråpe i hvert kvadrat. Denne varianten ble kalt semitilfeldig. Svarene fordelte seg noenlunde jevnt utover de tre forslagene, med litt færre svar på A. Green analyserte svarene etter alder og evner. Det var liten forandring på fordelingen av svarene etter alder, mens det derimot var en klar tendens til at elever med gode evner oftere svarte B og C enn svake elever. Det at mange elever svarer alternativ B og C sier oss at mange barn har en god forståelse av begrepet tilfeldighet, samtidig viser det at en del elever har problemer med å oppfatte tilfeldighet. Man kan anta at når de leter etter en tilfeldig fordeling, så leter de etter et mønster eller symmetri de forbinder med tilfeldighet. Greens undersøkelse setter spørsmålstegn ved Piaget og Inhelders påstander om at forståelsen av tilfeldighet er selvinnlysende i en slik naturlig setting. Det kan være verdt å merke seg at det er liten forbedring med alder.

3.5.3 Betinget sannsynlighet

Begrepet *conditional probability* er her oversatt til *betinget sannsynlighet*. Når emnet sannsynlighet blir innført i skoleverket, så er det første som innprentes, at en trekning ikke har innvirkning på neste. Elever kan derfor ha problemer med å plukke opp de tilfellene der en hendelse har innvirkning på en annen eller er avhengig av en annen. Ruma Falk (1986) behandler dette emnet i sitt bidrag til ICOTS 2. Han fokuserer på tre eksempler av betinget sannsynlighet som skaper problemer for studenter og lærere. Den første av de tre blir nå også kalt *Falkfenomenet*, eller *"The Falk phenomenon"* i litteraturen.

Eksempel 1:

Det første eksemplet dreier seg om problemet med å se at kunnskap om en senere hendelse kan påvirke sannsynligheten. Et eksempel er denne situasjonen, som det stilles to spørsmål til: En krukke inneholder to hvite kuler og to sorte kuler. To kuler trekkes etter hverandre fra krukken, uten tilbakelegging. Første spørsmål er: Hva er sannsynligheten for å få en hvit kule på andre trekning gitt at den første kula var hvit? Det andre spørsmålet er: Hva er sannsynligheten for at den første kula er hvit gitt at den andre kula er hvit? På det første spørsmålet svarer de fleste riktig, mens på det andre får mange elever problemer. De har vanskelig for å godta at noe som ikke har skjedd ennå har innvirkning på den første trekningen. En vanlig respons er "den første kula bryr seg ikke om den andre er sort eller hvit". Selv om de to spørsmålene er symmetriske i tid, så oppleves det ikke slik av elever.

Et lignende problem blir kalt *Montys dilemma* eller Monty Hall problemet. Dette problemet ble berømt da Craig Whitaker sendte det som leserinnlegg til Marilyn vos Savant i magasinet Parade i 1990. Omtrent 10 000 lesere, hvorav flere hundre mattelærere, skrev inn og protesterte på løsningen som ble presentert.

Montys dilemma: Anta at du er deltaker i en konkurranse på TV, der du blir bedt om å velge mellom tre dører. Bak en av dørene er premien en bil, mens bak de andre er det geiter. Du velger en dør. Programlederen som vet hva som er bak dørene, åpner da en dør med en geit bak. Lønner det seg da for deg å bytte dør? (programlederen vil alltid åpne en dør med en geit bak) Shaughnessy og Bergman (1993) oppdaget at de fleste elever som blir gitt denne oppgaven svarer at når programlederen åpner en dør med en geit bak, så øker vinnersjansen til 1/2. Begrunnelsen de gjerne gav, var at de nå visste at en av dørene ikke gav gevinst. At det alltid lønner seg å bytte dør er åpenbart vanskelig å forstå intuitivt. (Sannsynligheten for å velge riktig dør først er 1/3. Det gjør at sannsynligheten for å vinne hvis du bytter dør er 2/3.) Både Falk (1986) og Shaughnessy og Bergman (1993) trekker fram simuleringer som en lovende metode for å overkomme slike misoppfatninger.

Eksempel 2:

Det andre eksemplet handler om problemet med å definere antall utfall. En oppgave som illustrerer dette problemet er: Tre kort ligger i en hatt. Det ene kortet er grønt på begge sider, det andre er blått på begge sider, mens det tredje er blått på den ene siden og grønt på den andre. Du trekker et kort og legger det på bordet. Kortet er blått. Hva er sannsynligheten for at den andre siden på kortet også er blått? De fleste vil her svare at sannsynligheten er 1/2, med begrunnelsen at kortet som var grønt på begge sidene ikke lenger er aktuell, og at det da bare er to kort å velge fra. Misoppfatningen her er at man tar feil når det gjelder antall mulige utfall. Med de to kortene som er igjen, som har minst en grønn side, er det ikke to mulige utfall, men tre. En på kortet med en grønn side og to på kortet med to grønne sider, men bare det ene kortet har en blå side. Sannsynligheten blir da 1/3.

En variant av dette eksemplet er *to gutter – problemet*. Du kommer i snakk med en kvinne som forteller at hun har to barn, og det kommer fram at ett av barna er gutt. Hvor stor er da sannsynligheten for at den andre også er gutt? Selv om vi vet at muligheten med to jenter ikke er lenger er mulig når det skal være en gutt, så er de to andre mulighetene – gutt/jente og gutt/gutt ikke like sannsynlig. Totalt er det fire mulige kombinasjoner gutter og jenter, noe som gjør at sannsynligheten for to gutter i dette problemet er 1/3. Dersom noen får 1/2 så har de gjort en overfladisk vurdering av antall mulige utfall, og tenkt at når en er gutt, så er det bare to muligheter når det gjelder neste barn. Det at det eldste barnet ikke trenger være gutt, åpner opp for en mulighet til.

Eksempel 3:

Det tredje eksemplet avslører manglende evne til å se forskjell på de to retningene ved betinget sannsynlighet: Sannsynligheten for hendelse A gitt hendelse B, og sannsynligheten for hendelse B gitt hendelse A. Denne misoppfatningen forekommer ofte når en medisinsk undersøkelse skal vurderes (Falk, 1986). Sannsynligheten for en sykdom når det foreligger et positivt prøvesvar, blir da feilaktig tatt for det samme som sannsynligheten for at et positivt prøvesvar betyr at man har sykdommen. Et tilfelle hvor dette har betydning, er testing for down syndrom hos gravide kvinner. Her er det en dramatisk forskjell på sannsynligheten for det å ha et foster med down syndrom når du har fått et positivt testresultat, og det å få et positivt testresultat når du har et foster med down syndrom. For kvinner rundt 30 år er sannsynlighet for å få et barn med down syndrom 1/885. Selv om sannsynligheten for å få et riktig testresultat er 99,5%, uavhengig om fosteret har down syndrom, så er sannsynligheten for at fosteret har down syndrom bare 18,4% når du har fått et positivt testresultat. For å si det på en annen måte: sannsynligheten for et positivt testresultat gitt at fosteret har down syndrom er 0,995, mens sannsynligheten for at fosteret har down syndrom gitt et positivt testresultat er 0,184.

3.5.4 Lik sannsynlighetsfeil

Når noen beregner sannsynligheten intuitivt til å være lik for to hendelser, mens disse to hendelsene egentlig har ulik sannsynlighet, er det en misoppfatning av typen *lik sannsynlighetsfeil* (equibrobability bias). Lecoutre og Fischbein gjennomførte i 1998 en undersøkelse hvor denne oppgaven inngikk (Batanero, Sanchez, 2005).

> Når to terninger blir kastet samtidig, hvilket av de følgende svarene er mest sannsynlig: a) Du får 5 og 6; b)Du får to femmere; c) Sannsynligheten for å få disse to svarene er det samme; d) Det er umulig å svare på dette.

Et resultat av undersøkelsen var at et flertall av elevene svarte alternativ c) på denne oppgaven. Et resultat som visstnok holdt seg ganske konstant uavhengig av alder.

3.5.5 Løsningstilnærming

Konold (1989) fant en type heuristisk misoppfatning, *løsningstilnærming* (outcome approach), som folk bruker til å tolke sannsynligheten for gjentatte hendelser. Slutningene hans kom fra intervjuer av elever rundt oppgaver av typen:

> a) Hva menes det med at en meteorolog sier at i morgen er det 70 % sjanse for regn?
>
> b) Anta at meteorologen sa at det var 70 % sjanse for regn, og at det ikke regnet. Hva vil du si om utsagnet om at det var 70 % sjanse for regn?

Ut fra det elevene snakket om, kom han til at mange elever tolker slike problemer på en dagligdags måte, at de ikke bruker kunnskaper fra den matematiske disiplinen sannsynlighet. Disse elevene så på meteorologens utsagn mer som en spådom enn en matematisk beregning. De så på det som å forutse resultatet av en enkelt hendelse, ikke som et uttrykk for fordelingen av mulige hendelser. Dersom sannsynligheten var nær 0 % vil de se på det som umulig, dersom den var nær 100 % vil de se på det som sikkert, bare dersom det var nær 50 % vil de se på det som tilfeldig.

3.6 Oppsummering av misoppfatningene

Her er en kort oppsummering av misoppfatningene som er kategorisert og gjennomgått i dette kapittelet. Mange av disse misoppfatningene kommer til uttrykk gjennom elevenes besvarelser i min undersøkelse, men ikke alle. Undersøkelsen var ikke så stor at den omfattet alle disse misoppfatningene, se kapittel 4.3 om piloteringen av oppgavesettet.

3.6.1 Kombinatorikk

Enkle kombinatoriske problemer kan kategoriseres etter tre modeller:

- Utvelgelsesmodellen (n trekninger fra et utvalg av m objekter)
- Fordelingsmodellen (m objekter fordeles på n plasseringer)
- Oppdelingsmodellen (m objekter fordeles på n undergrupper)

Det er oppgaver etter de to siste modellene som er vanskeligst for elever.

Ut fra disse tre modellene kan man få en rekke ulike misoppfatninger, som i kapittel 3.3 er delt inn i åtte kategorier. Av disse åtte er de seks som er mest aktuelle for elever i grunnskolen listet opp under:

- Feil rekkefølge (når elevene ikke ser om rekkefølgen er viktig eller ikke).
- Gjentagelsesfeil (når eleven ikke tar hensyn til tilbakelegging, eller ikke tilbakelegging).
- Blander sammen hva slags ting som brukes (når elever prøver å skille mellom ting som er like, eller ikke skiller mellom ting som ikke er like).
- Utelate noen elementer før de setter opp kombinasjoner.
- Usystematisk oppramsing (når elevene har ramset opp ulike riktige kombinasjoner, uten at de er i noen spesiell rekkefølge, samtidig som de har utelatt enkelte).
- Feil bruk av trediagrammet (når elever enten bruker trediagrammet feil, eller tolker trediagrammet feil).

3.6.2 Sannsynlighet

Elever tyr gjerne til misoppfatninger når de blir konfrontert med et problem de enten mangler forutsetning for å løse, eller som de ikke setter av tid og krefter nok til å løse korrekt. De tyr ofte til uformelle metoder som tommelfingerregler, intuisjon, sunn fornuft, erfaringer – også kalt heuristiske metoder.

Tre grupper, med undergrupper eller varianter, av misoppfatninger som er generert av heuristiske metoder, er:

- Heuristisk representativitet (når eleven vurderer sannsynlighet ut fra om en hendelse er typisk i forhold til forutgående hendelser).
    - Representativitet (når eleven mener at fordelingen av hendelsene helst skal representere prosessen, når eleven mener at en hendelse på en eller annen måte er typisk i forhold til forutgående hendelser).
    - Negativt tilbakeblikk (når eleven mener at trekninger som allerede har skjedd, har innvirkning på neste trekning, og derfor velger noe annet).
    - Positivt tilbakeblikk (når eleven mener at trekninger som allerede har skjedd har innvirkning på neste trekning, og derfor velger det samme).
    - Base-rate neglect (når to eller flere variabler virker inn på sannsynligheten, og eleven ser bort i fra en fordi den andre virker viktigere).
- Heuristisk tilgjengelighet (Når elever mener at sannsynligheten for en hendelse baseres på hvor lett det er for dem å komme på bestemte tilfeller av denne hendelsen)
- Tilpassing og forankring (Når elevene gjør mangelfulle sannsynlighetsberegninger ved at de tar utgangspunkt i en opplysning, og justerer beregningen ut fra opplysninger i problemet).
    - Konjunksjonsfeil (når elever mener at sannsynligheten for at to hendelser inntreffer er større enn for at en av hendelsene inntreffer).
    - Disjunksjonsfeil (når eleven mener at sannsynligheten for et utfall i en hendelse er større enn det samme utfallet i løpet av flere sammenlignbare hendelser)

Andre grupper av misoppfatninger er listet under:

- Til begrepet tilfeldighet (når elever finner mønster når de ser etter tilfeldighet).
- Til betinget sannsynlighet (når elever har problemer med å se at en hendelse har innvirkning på eller er avhengig av en annen hendelse).
    - Falkfenomenet (når eleven har problemer med å se at kunnskap om en senere hendelse kan påvirke sannsynligheten).
    - Problemer med å definere antall utfall når eleven blir gitt opplysninger som påvirker antall utfall.
    - Problemer med å se forskjell på sannsynligheten mellom de to retningene til to hendelser. (når eleven ikke ser forskjellen på sannsynligheten for hendelse A gitt hendelse B, og sannsynligheten for hendelse B gitt hendelse A).

- Lik sannsynlighetsfeil (når eleven beregner sannsynligheten intuitivt til å være lik for to hendelser, mens disse to hendelsene egentlig har ulik sannsynlighet).
- Løsningstilnærming (når eleven ser på det som sin oppgave å avgjøre hva som er riktig svar, i stedet for å vurdere hva som er mest sannsynlig).

4 Metode

På slutten av skoleåret 2007/2008 gjennomførte jeg en undersøkelse innen emnet sannsynlighet for elever på 8.trinn og 10.trinn i grunnskolen. Målet med testen var å avdekke noen av de misoppfatningene elevene har innen emnet sannsynlighet. Testen inneholdt elleve flervalgsoppgaver, hvor bare ett alternativ var riktig, med to, tre eller fire svaralternativer. I tillegg ble elevene til de fleste oppgavene bedt om å forklare hvorfor de valgte dette svaralternativet. Jeg har brukt statistikkprogrammet SPSS 16.0 (the Statistical Package for the Social Science) til å analysere tallmaterialet.

Oppgavene i testen har jeg konstruert selv, selv om mange av dem er varianter av eller avledet av oppgaver og misoppfatninger, som er dokumentert i litteraturen om misoppfatninger innen sannsynlighet. Testen inneholdt bare elleve oppgaver for at den ikke skulle være for lang, noe som kunne føre til at elever ble leie, og derfor miste motivasjonen underveis.

4.1 Kvantitativ metode

Kvantitative metoder er forskningsmetoder basert på innsamling og analyse av større mengde data, hvor fokus er på antall, variabler og målbarhet. Det er vanlig å presentere resultatene av slike metoder statistisk i tabeller og grafer. Målet er gjerne å kunne generalisere, å kunne si noe om populasjonen, eller deler av populasjonen. Kvantitative metoder skiller seg fra kvalitative metoder ved at kvalitative metoder fokuserer på individnivå. Resultatene er da knyttet til det enkelttilfellet metoden er benyttet på, og kan vanskelig overføres på populasjonen som helhet. Kvalitative metoder representerer da en dybde, spesielt i sosial og begrepsmessig forståelse, mens kvantitative metoder da representerer sammenlignbare data. Man kan oppnå begge deler ved å metodetriangulere, å bruke begge metodene innen samme undersøkelse. I følge Robson (2002) er valget av enten kvalitative eller kvantitative metoder ikke ukontroversielt. I enkelte samfunnsvitenskaplige miljøer er det en viss motstand mot kvantitative metoder, mens for eksempel i enkelte miljøer innen medisin og psykologi regnes kvalitative metoder å ha liten verdi.

Kvantitativ metode er teoridrevet, noe som vil si at for å kunne stille de rette spørsmålene, må vi ha forventninger til hva svarene kommer til å bli.

> *”The only way in which we can, as a fixed design requires, specify in advance the variables to be included in our study, and the exact procedures to be followed, is by having a reasonably well articulated theory of the phenomenon we are researching. To put this in other terms, we must already have a substantial amount of conceptual understanding about a phenomenon before it is worthwhile following the risky strategy of investing precious time and resources in such design.”*
>
> (Robson, 2002)

Jeg har valgt en kvantitativ undersøkelse med to elementer, hvor oppgavene har både en flervalgsdel og en åpen del. Flervalgsdelen er behandlet rent kvantitativt, mens den åpne delen har hatt elementer av kvalitativ metode, siden kodingen og analysen her innebærer å forstå og sette seg inn i enkeltelevers begrepsforståelse. Selv om jeg ikke har gjort det til denne masteroppgaven, så kunne intervju av enkeltelever ha utdypet forståelsen av hvordan enkelte elever har forstått enkelte begreper.

Oppgavene i elevheftet er lagd både ut fra egne erfaringer om misoppfatninger fra mange år som matematikklærer i ungdomsskolen, og ut fra påviste misoppfatninger i litteraturen, som jeg har omtalt i kapittel 3.

4.2 Utvalget

I alt deltok 484 elever i undersøkelsen, hvorav 288 elever på 8.trinn og 196 elever på 10.trinn. Fire ungdomsskoler, fra tre kommuner, deltok i undersøkelsen. De fire er, med kommunenavnet i parentes: Risil ungdomsskole (Vestby), Grevlingen ungdomsskole (Vestby), Notodden ungdomsskole (Notodden), Hoppern ungdomsskole (Moss). Risil og Hoppern deltok med elevene på 8.trinn og 10.trinn, mens på Grevlingen var det 8.trinn, og på Notodden var det 10.trinn.

Robson (2002) deler de forskjellige måtene du kan velge respondenter til en undersøkelse i to grupper av utvalg: *probability samples* og *non-probability samples*. Jeg har valgt å kalle disse for *tilfeldig utvalg* og *ikke-tilfeldig utvalg*. Tilfeldig utvalg er den metoden som i størst mulig grad gjør at funn og resultater kan beskrive populasjonen som helhet. Slik Robson definerer tilfeldig utvalg, så må respondentene velges så tilfeldig at sannsynligheten for å bli valg ut av en populasjon er lik for alle i populasjonen. Deltagerne i undersøkelsen kan bli valgt etter metoder som for eksempel å trekke tilfeldig, eller at hver n'te person i populasjonen velges. Med andre ord at det er mulig å beregne sannsynligheten for at en viss person kommer til å delta i undersøkelsen. Alle mulige måter å velge et utvalg på som ikke oppfyller dette er et ikke-tilfeldig utvalg. Utvalget av elever til min undersøkelse må derfor defineres som et ikke-tilfeldig utvalg. Dette siden en av skolene er den jeg underviser i, de andre skolene er valgt fordi jeg kjenner minst en lærer der, og at de er i rimelig nærhet til der jeg bor. Skolene som har deltatt i undersøkelsene er vanlige skoler i tre kommuner, hvor hele trinn, minus fravær, har svart på undersøkelsen. Skolene burde kunne være ganske representative for skoler på Østlandet. Det trinnet jeg jobbet på, deltok ikke i piloteringen, men i selve undersøkelsen.

4.3 Pilotering

I løpet av våren 2007 lagde jeg et oppgavesett med diagnostiske oppgaver til sannsynlighet. Disse oppgavene var rettet inn mot ungdomstrinnet. De skulle først og fremst dekke kjente og mulige feilforestillinger elever kan ha innenfor emnet sannsynlighet. Samtidig burde de emnemessig for det meste holde seg til de målene som kunnskapsløftet setter opp for ungdomstrinnet. På ungdomstrinnet er kombinatorikk en del av emnet sannsynlighet, så det var derfor et naturlig valg å knytte et par av oppgavene til kombinatorikk.

Oppgavesettet ble først prøvd ut på matematikklærere og andre lærere, deretter ble det prøvd ut på elever på 10.trinn, 8.trinn og 6.trinn. Det er verdt å merke seg at piloteringen foregikk ett skoleår før selve undersøkelsen, slik at ingen av de elevene som deltok i piloteringen deltok i undersøkelsen. Til sammen 114 elever og 8 lærere deltok i disse pilottestene i 6 forskjellige runder.

Oppgavesettet gjennomgikk store forandringer gjennom dette arbeidet. Det ble etter hvert klart at omfanget av oppgavesettet ble for stort, og det ble behov for å spisse oppgavesettet noe. Fokus ble mer på noen misoppfatninger innen sannsynlighet, selv om enkelte oppgaver vil ha et element av kombinatorikk. De viktigste forandringene var blant annet:

- Å forenkle og minske språkbruken i oppgavene.
- Fjerne de rene kombinatorikkoppgavene.
- At elevene ble bedt om å begrunne valget sitt.
- Fjerne oppgaver som i liten grad avslørte misoppfatninger.

Et eksempel på det siste var for eksempel oppgaver av typen:

"Hanne slår mynt og kron med et kronestykke. Hanne får mynt de seks første gangene. Når hun skal slå den syvende gangen, hva er da riktig: A - Sannsynligheten er størst for at Hanne får mynt, B - Sannsynligheten er størst for at Hanne får kron, C – Sannsynligheten er like stor for at Hanne får mynt eller kron"

Her skulle en misoppfatning av typen heuristisk representativitet gjøre at elevene ikke skulle svare C. Nesten ingen elever lot seg lure på denne oppgaven, og lignende oppgaver. Lærere må legge stor vekt på at tidligere trekninger ikke har innvirkning på neste, siden ikke engang 6.klasseelevene gjorde feil på denne oppgaven.

Oppgavene ble opprinnelig lagd for at de skulle inngå i KIM-prosjektet, så oppgavene ble utformet for også å kunne fungere som en hjelp i undervisning, ikke bare som en test. Tanken var altså at de også skulle kunne brukes som en del av diagnostisk undervisning, og til å kartlegge elevers forståelse rundt enkelte begreper innen sannsynlighet. Progresjonen i KIM var imidlertid så liten at jeg endte opp med å gjennomføre undersøkelsen alene.

4.4 Koding

Kodingen av flervalgsoppgavene alene var et enkelt arbeid, mens kodingen av elevenes begrunnelse for valget, var tidkrevende og vanskelig. Innledningsvis gikk jeg gjennom ca hundre oppgaver fra ulike trinn for å prøve å se et mønster i ulike svar, før jeg startet kodingen. Etter hvert som elevene kom med nye forklaringer, fikk de nye koder. Alt i alt ble det litt i underkant av tre hundre forskjellige koder på de elleve oppgavene. Det sier seg selv at mange av disse kodene måtte slås sammen, eller sammenfattes i egne kategorier i analysefasen.

4.5 Måleskalaer

Variablene som settes inn i SPSS bruker stort sett tre måleskalaer oppkalt etter målenivået: nominal, ordinal og intervall (Lie, Caspersen, 2004). Hvordan man bruker statistiske beregninger, som for eksempel sentraltendens og spredning, er avhengig av hvilket målenivå dataene er på.

Nominal: Brukes når rekkefølgen på svarene er tilfeldig. Hvert steg på skalaen representerer noe som er helt adskilt fra neste steg på skalaen. Dette regnes som det laveste nivået. Variablene til oppgavene i min undersøkelse passer inn i denne måleskalaen.

Ordinal: Som nominal måleskala, men her har skalaen en retning. Et eksempel vil være et spørsmål om hvor mye du liker noe, hvor svaralternativene kan være: liker ikke, liker litt, liker godt, liker veldig godt. Avstanden mellom de ulike alternativene er ikke matematisk bestemt.

Intervall: Dataene har her en enhet, og avstand mellom enhetene er lik langs hele tallinjen. Eksempler på intervalldata er alder, temperatur, poeng. I min undersøkelse er det poengsummen på hver enkelt elev som hører hjemme her.

4.6 Validitet og reliabilitet

Ofte brukes begrepet validitet om gyldighet og relevans, mens reliabilitet brukes om pålitelighet og nøyaktighet. Validitet er et uttrykk for hvor godt en undersøkelse, en test eller en oppgave måler det den er ment å måle. Reliabilitet er hvor konsistent eller nøyaktig den måler det den skal. *"God reliabilitet betyr at data er lite påvirket av tilfeldige målingsfeil."* (Kleven, 2002).

4.6.1 Reliabilitet

Mangel på reliabilitet kan ha mange årsaker. En årsak kan være at elevene ville svart annerledes om de hadde fått testen på en annen dag eller i en annen time, på grunn av ulike sosiale og miljømessige faktorer. Elevenes forhold til læreren som gjennomfører testen med elevene, kan også virke inn, siden noen elever ønsker å gjøre læreren til lags, eller motsatt. I denne undersøkelsen er det vanskelig å vurdere hva som har skjedd i klasserommene, siden jeg har vært avhengig av lærerne som har gjennomført testen, selv om lærerne har blitt instruert om hvordan testen skal gjennomføres. Likevel vil jeg anta at disse faktorene har lite å si, fordi dette er faktorer som vil variere på en tilfeldig måte, og dermed utjevne seg over tid, på grunn av loven om store tall.

En annen årsak som virker inn på reliabiliteten er om de som er observatører, eller retter oppgaver, har virket inn på resultatet. De kan ha dårlige dager, dersom flere observatører koder, kan de ha ulik forståelse av kategoriene, eller bevisst eller ubevisst kan de ha presset svarene mot ideologiske eller ønskede svar. I min undersøkelse bør reliabiliteten være god fordi jeg har kodet alle besvarelsene selv.

4.6.2 Validitet

Det finnes ulike former for validitet (Robson, 2002). Jeg kommer derfor til å utdype begrepene *construct validity, internal validity* og *generalizability*. På norsk kommer jeg til å kalle dem konstrukt validitet, indre validitet og ytre validitet.

Konstrukt validitet: Saken er her om du måler det du tror du måler. I undersøkelsen er det jeg ønsker å måle misoppfatninger innen sannsynlighet. Det som avgjør om undersøkelsen har bra konstrukt validitet, er om oppgavene jeg har lagd er godt egnet til å avsløre misoppfatninger innen sannsynlighet. Det finnes ingen lett og enkel måte å bruke for å vurdere konstrukt validiteten til en undersøkelse. *"For many studies there is an intuitive reasonableness to assertions that a certain approach provides an appropriate measure"* (Robson,2002) Jeg antar at den er god basert på den omfattende piloteringen og tilknytningen til KIM-prosjektet, og på grunn av den erfaring jeg har bygget opp om emnet gjennom mange år som matematikklærer i ungdomsskolen.

Indre validitet: Saken her er om det å innføre en test har noe å si for resultatet. For eksempel om det å innføre nasjonale prøver har noe å si for elvenes faglige nivå. *"If a study can plausibly demonstrate this causal relationship between treatment and outcome, it is referred to as having internal validity"* (Robson, 2002) Hensikten med min undersøkelse har ikke vært å finne elevenes faglige nivå, eller å rangere elevene. Dersom den hadde vært direkte knyttet til diagnostisk undervisning, ville dette vært aktuelt å gå inn på, men siden testens innvirkning på elevenes læring ikke er noen stor sak, så er ikke dette av noen betydning for min undersøkelse.

Ytre validitet: Saken her er om resultatet i testen kan overføres på populasjonen som helhet. De tingene som setter den ytre validiteten er slikt som: om resultatet kun gjelder de gruppene som deltok i testen, om resultatet er avhengig av en gitt kontekst, om de som deltok hadde spesifikke erfaringer som påvirker resultatet av testen, om testens innhold hadde spesifikk relevans for de som deltok. Selv om det å velge ut hele klassetrinn på noen skoler kan gi et brukbart snitt av populasjonen av 8.trinnselever og 10.trinnselever, så oppfyller ikke utvelgelsen av skolene definisjonen til et tilfeldig utvalg (probability samples). Siden utvalget til undersøkelsen er av typen ikke-tilfeldig utvalg (non-probability samples), så må man være forsiktig med å si at det er allmenngyldig for hele populasjonen.

4.7 Item-analyse

I kapittel 5.10 vil dataene fra undersøkelsen bli satt inn i en item-analyse oppgave for oppgave. I mitt tilfelle innebærer det en analyse av:

- En prosentfordeling for hvert svaralternativ, som her er kategorisert etter de mulige flervalgalternativene, blanke svar og de som har krysset av flere alternativer.
- En gjennomsnittspoengsum, kalt dyktighet, for de elevene som har svart et bestemt svar.
- Oppgavens diskriminering, som her er Pearson korrelasjon mellom poeng på hver enkelt oppgave og poengsummen for hele testen.

Til dette er det tre begreper det er greit å klargjøre: korrelasjon, signifikans og Pearsons korrelasjonskoeffisient.

4.7.1 Korrelasjon

Ofte er det nyttig å se etter om to variabler forandrer seg på samme vis, om de varierer i takt. *”En korrelasjonskoeffisient er et mål på i hvor stor grad de to variablene varierer ’i takt’, altså i hvor stor grad den ene variabelen har en høy verdi samtidig med (for eksempel for samme elev) når den andre har det, og omvendt”* (Lie, Caspersen, 2004) Korrelasjon er et mål på styrken og retningen til den innbyrdes avhengigheten til to variabler. *”Measures of correlation (i.e. of the co-relationship between two variables) are referred to as correlation coefficients. They give an indication of both the strength and direction of the relationship between the variables.”* (Robson, 2002) En korrelasjonskoeffisient er et mål på i hvor stor grad to variabler varierer sammen. Det er positiv korrelasjon når økningen i den ene variabelen gjennomgående tilsvarer økningen i den andre. I motsatt fall er det negativ korrelasjon når en økning i en variabel tilsvarer en reduksjon i en annen. Det er verdt å merke seg at korrelasjon mellom to variabler ikke nødvendigvis innebærer at det er en kausal sammenheng mellom variablene.

4.7.2 Signifikans

Signifikans er et begrep som brukes innen statistikk for å beskrive sannsynligheten for at en korrelasjon ikke har oppstått tilfeldig. Den første som omtaler begrepet regnes å være Ronald Fisher. *"Critical tests of this kind may be called tests of significance, and when such tests are available we may discover whether a second sample is or is not significantly different from the first."* (Fisher, 1925)

Når man i SPSS gjennomfører analyser som Pearson produktmoment eller en T-test, vil man få en beregning av signifikansen. Dersom signifikansen er oppgitt til 0,08, betyr det at sannsynligheten for at sammenhengen har oppstått tilfeldig, er 8 %. Sammenhengen vil her være slikt som Pearsons korrelasjonskoeffisient, eller forskjellen mellom middelverdier i T-tester. Her kreves det at vi må velge hvilket sannsynlighetsnivå som er tilstrekkelig lavt. Et slikt sannsynlighetsnivå kalles signifikansnivå, og symboliseres med den greske bokstaven alfa (α). ”Valg av α er i prinsippet komplisert, men i psykologisk og pedagogisk forskning settes α ofte lik 0,05 og 0,01.” (Lund, Christophersen, 1999).

4.7.3 Pearsons korrelasjonskoeffisient

Denne koeffisienten er en størrelse som beskriver korrelasjonen mellom to variabler. For Pearsons korrelasjonskoeffisient gjelder det at variablene må være av typen intervall eller kvasi-intervall. Kvasi-intervall kalles det når svaralternativene følger en skala av typen som går for eksempel fra *liker svært godt* til *liker svært dårlig*, og resultatet er kodet om til intervall for å kunne bruke det statistisk. Dette gjøres for å vurdere om størrelsen på koeffisienten kan det være nyttig å sammenligne med tilsvarende spredningsdiagrammer. Et problem i forhold til min oppgave er at den eneste variabelen som i utgangspunktet er i intervallform, er den samlede poengsummen til hver enkelt elev. For å kunne finne en korrelasjonskoeffisient mellom samlet poengsum og hver enkelt oppgave, kodet jeg nye variabler i SPSS på intervallform. Da får disse variablene bare de to verdiene riktig (1) eller galt (2). Korrelasjonskoeffisienten forteller da i hvor stor grad de som har svart riktig, har høyest verdi på testen som helhet. Koeffisienten har verdier fra 1 til -1, hvor 1 er perfekt positiv korrelasjon, 0 er ingen korrelasjon og -1 er perfekt negativ korrelasjon. Dersom en tar kvadratet av korrelasjonskoeffisienten finner en hvor stor del av variansen som er felles for de to variablene. En korrelasjonskoeffisient mellom en oppgave og samlet poengsum på 0,4, vil si at 16 % av variansen er felles. En koeffisient på over 0,7 kan regnes som høy, mens en på under 0,3 kan regnes som lav (Lie, Caspersen, 2004).

4.7.4 T-test

I SPSS kan man foreta en T-test (Independent-Samples T Test), der hensikten er å sjekke om det er noen karakteristiske forskjeller mellom undergrupper i forhold til utvalgte variabler. Dette kan være slikt som å se om det er noen forskjeller på hvor bra jenter/gutter eller 8.trinn/10.trinn har svart på undersøkelsen, eller for å se om det er noen forskjeller på hvor bra jenter/gutter eller 8.trinn/10.trinn har svart på enkelte oppgaver.

For å kunne diskutere slike forskjeller må man vite i hvor stor grad disse forskjellene kan ha oppstått tilfeldig. Med andre ord er hensikten med en T-test å se om observerte forskjeller er signifikante (Lie, Caspersen, 2004) En T-test gir et mål på hvor stor forskjellen er og et mål på signifikansen. Signifikansen blir oppgitt slik det er beskrevet i kapittel 4.7.2 (side 52). T-tester er brukt i kapitlene 5.10, 5.11 og 5.12 (side 105-115).

5 Resultater og analyse

Alle sitater fra elevenes forklaringer er skrevet av ordrett, med skrivefeil og manglende tegnsetting, slik eleven har skrevet det. I tabellene er det brukt frekvens og prosent, hvor frekvens er antallet elever som har svart slik, og prosent er regnet ut i forhold til alle elevene som deltok i undersøkelsen. En del tabeller viser fordelingen av svar på et svaralternativ i en oppgave. Prosenten viser da hvor mange prosent av alle elevene i undersøkelsen, som gav en bestemt forklaring til akkurat det svaralternativet.

5.1 Oppgave 1

I den første oppgaven blir elevene testet på om de forstår forholdsbegrepet, som er nødvendig for å komme videre innen sannsynlighet. Dersom elevene ikke ser og forstår forholdet mellom de sorte og hvite kulene, så er spørsmålet hvilke løsningsstrategier de da bruker.

Figur 5.1: Oppgave 1.

Du har to krukker med sorte og hvite klinkekuler. Det er ikke mulig å se kulene når du trekker.
Hvilken av krukkene under gir størst sjanse for å trekke en hvit kule?

A B

☐ A gir størst sjanse.

☐ B gir størst sjanse.

☐ Det er lik sjanse i begge krukkene.

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

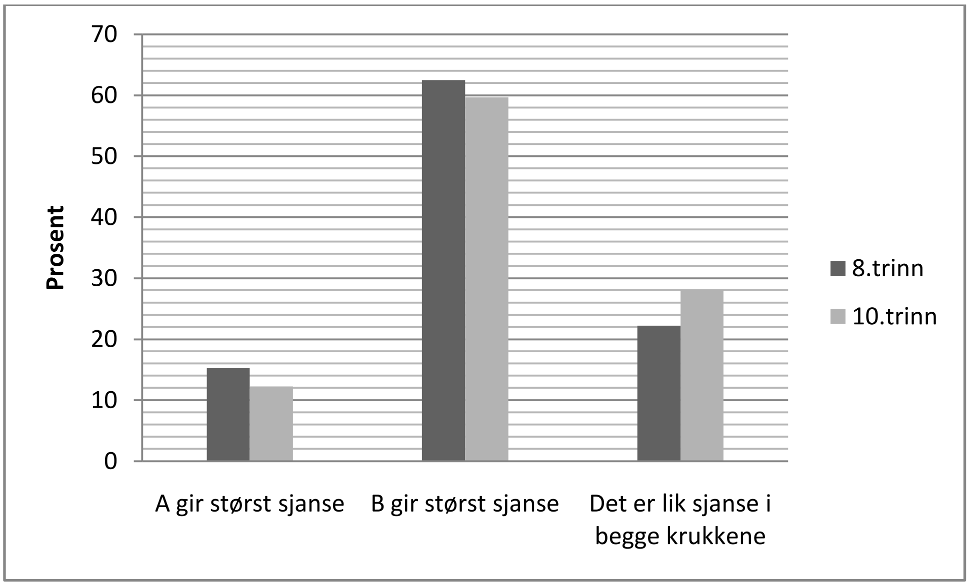
Dersom man bruker formelen for klassisk sannsynlighet får man at det er 60 % sjanse for å trekke hvit fra krukke A, mens det er 67 % sjanse for å trekke hvit fra krukke B. Riktig svaralternativ er da: *B gir størst sjanse.*

Antall svar til hvert av de tre svaralternativene er satt inn i tabellen og diagrammet under. Alle elevene som deltok i undersøkelsen svarte på denne oppgaven, og hele 80,9 % av elevene gav en forklaring på svaret sitt.

Tabell 5.1: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 1.

	Frekvens	Prosent
A gir størst sjanse	68	14.0
B gir størst sjanse	297	61.4
Det er lik sjanse i begge krukkene.	119	24.6
Sum totalt	484	100.0

Figur 5.2: Diagram over svar til oppgave 1, med fordeling på trinn.



5.1.1 Forklaringer til ”A gir størst sjanse”

Av de elevene som mente at det var størst sjanse for å trekke en hvit kule ut av krukke A, har litt over halvparten gitt en begrunnelse som lar seg klassifisere. Resten har enten ikke gitt en forklaring, sagt at de ikke vet, gitt ”ser slik ut”-svar eller kommet med forklaringer de er ganske alene om. Med ”ser slik ut”-svar mener jeg svar som går ut på at eleven bare konstaterer at det er riktig. For eksempel svar som *fordi det er riktig* og *det er mest sannsynlig.*

Det er to typer feil svar som kommer tydelig frem i dette svaralternativet. Den ene er at 3,1 % av elevene i undersøkelsen har lest oppgaven feil, og har regnet ut sannsynligheten for å trekke en sort kule. Den andre typen er en misoppfatning om at jo flere hvite kuler det er, jo større sjanse er det for å trekke en, uavhengig av hvor mange sorte det er. Elevene mangler en forståelse av forholdet mellom sorte og hvite kuler. Et eksempel på det er elev #432 (jente, 10.trinn): ”Det er flere hvite kuler i A enn i B.”

Tabell 5.2: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 1 til oppgave .

	Frekvens	Prosent
Har regnet sannsynligheten for å trekke sort på riktig måte.	15	3.1
Størst sjanse når det er flest hvite / flere kuler.	22	4.5
Andre svar	10	2.0
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	21	4,3

I tabellen over og i alle tilsvarende tabeller utover i kapittelet står prosent for andelen elever som har svart dette i forhold til alle elevene i undersøkelsen. Når det står at 3,1 % har svart at de har regnet sannsynligheten for å trekke sort på riktig måte, så betyr det at 3,1 % av de 484 elevene i undersøkelsen har svart dette.

5.1.2 Forklaringer til ”B gir størst sjanse”

I denne oppgaven er det mulig å komme fram til riktig svar på flere måter, og disse måtene kan deles inn i to hovedgrupper: forklaringer ut fra forhold, eller å regne med klassisk sannsynlighet.

To eksempler på disse hovedtypene med riktige svar:

- Elev #112 (jente, 8.trinn): ”fordi det er 3/5 sjanse i a og 2/3 sjanse i b og så gjorde jeg de om til 9/15 og 10/15 og da ser man at det er størst sjanse i b”
- Elev #381 (gutt, 10.trinn): ”Fordi det er flest hvite i forhold til svarte her”

Tilsynelatende har 61,4 % av elevene svart riktig, men når man går inn på forklaringene på hvorfor de har valgt dette svaralternativet, så er bildet litt annerledes. Utformingen av oppgaven kan ha gjort at enkelte mulige misoppfatninger har ført til at en del elever har svart riktig, selv om de har en svært ufullstendig forståelse av matematikken i den.

Tabell 5.3: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 2 til oppgave 1.

	Frekvens	Prosent
Forklarer ut fra forhold	35	7,2
Riktig utregning	96	19,8
Feil utregning/feil svar	76	15,8
Andre svar	6	1,2
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	82	16,9

Noen få elever har gjort beregninger som må sies å være feil, selv om de har endt med riktig svaralternativ. For eksempel i svaret til elev #167: ”A= 3/2= 150 % B = 2/1 = 200 %” Her holder ikke utregningen som matematisk metode for å finne fram til svaret, men det kan være noe riktig i tenkemåten likevel. Eleven kan ha tenkt at to hvite på en sort er mer enn tre hvite på to sorte.

1,9 % av elevene har krysset av på riktig svaralternativ med begrunnelsen at det er lettere å trekke hvit fra krukke B på grunn av kulenes plassering. I krukke B er en hvit kule øverst og i midten. Det er vanskelig å si om dette skyldes en mulig feilforestilling eller en svakhet med oppgaven. Alle elevene som svarte dette gikk på 8.trinn. Det kan tenkes at slike misoppfatninger oppstår når elevene ikke har nok formell kunnskap til å løse oppgaven, og må lete etter andre forklaringsmodeller på problemet.

Derimot er det en misoppfatning som trer fram: 54 elever eller 11,2 % av elevene i undersøkelsen svarer at de valgte krukke B fordi det var færre kuler i den krukken. De fleste av disse elevene skriver bare at det er enten færre kuler eller færre svarte, slik som elev #435 (jente, 10.trinn): ”B har bare en svart kule.” Antall elever med denne misoppfatningen avtar tilsynelatende med alder. 13,5 % av 8.trinnselevene i undersøkelsen valgte denne forklaringsmodellen, mens på 10.trinn var prosenten 7,7.

Man kunne forvente at eldre elver ville svare bedre på en slik oppgave. Faktisk er det motsatt 59,7 % av 10.trinnselevene mot 62,5 % av 8.trinnselevene har svart riktig, noe figur 5.2 også viser. Forskjellen er så liten at man ikke kan si at det ene trinnet har gjort det bedre enn det andre. Likevel er ingen forskjell et overraskende resultat, da man skulle forvente at 10.trinn ville gjort det bedre.

5.2.3 Forklaringer til ”det er lik sjanse i begge krukkene”

Under dette svaralternativet er det to grupper av svar som skiller seg ut, ved at en god del elever har tenkt likt. Den ene er forklaringer som går ut på at det er lik sjanse for å trekke en hvit kule i begge krukkene fordi det er en hvit kule mer enn sorte i begge krukkene. 7,2 % av elevene i undersøkelsen har svart dette. Den andre gruppen med svar er de som går ut på at det er lik sjanse fordi det er lagt til en kule av hver farge i krukke A. 2,9 % av elevene har svart dette. Disse to forklaringene ligner på hverandre fordi de begge går ut på at elevene har funnet et mønster i distribusjonen av sorte og hvite kuler, uten at de har klart å vurdere den relevans dette har for forholdet mellom sorte og hvite kuler i de to krukkene. Dette er nok ikke en feilforestilling direkte knyttet til sannsynlighet, men mer til begrepet forhold. Men dersom man ikke forstår forhold, så kommer man vanskelig videre i emnet sannsynlighet. Elevene ville likevel vært i stand til å se forbi dette om de hadde et trygt forhold til klassisk sannsynlighet, og hadde regnet matematisk på problemet i stedet for å prøve å gi et logisk eller intuitivt svar på oppgaven.

Figur 5.2 viser at en noe større andel av elevene på 10.trinn har svart dette svaralternativet enn elevene på 8.trinn. Når jeg ser på de ulike svarene er det ikke noe mønster i måten de fordeler seg på. Forklaringene til 10.trinnselevene fordeler seg utover mange svarkategorier noenlunde slik svarene fra 8.trinnselevene fordeler seg.

Tabell 5.4: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 3 til oppgave 1.

	Frekvens	Prosent
En hvit kule mer i begge krukkene	35	7,2
En kule mer av begge fargene i A	14	2,9
Andre svar	21	4,2
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	45	9,3

Bortsett fra de elevene som enten ikke begrunnet svarene sine, eller begrunnet dem med ”fordi”-svar, så er det mange ulike forklaringsmodeller som bare noen elever svarer likt på. Man kan tenke seg ulike misoppfatninger til disse svarene, men det er vanskelig å avgjøre når få elever har valgt en bestemt forklaringsmodell. Eksempler på forklaringsmodeller under andre svar er slikt som:

- Eleven har regnet riktig og har likevel krysset av feil.
- De hevder at det er lik sannsynlighet for å trekke hvit eller sort kule.
- De hevder at det er likt forhold mellom sort og hvit.

- De har telt feil antall kuler i krukkene.
- De har valgt svaralternativet på grunn av kulenes plassering.
- De har kommet med forklaringer jeg har vanskeligheter med å forstå meningen i.

5.2 Oppgave 2 og 4

Figur 5.3: Oppgave 2

Du leker med en terning, og du ønsker å få seksere.

Kryss av ved det du synes er mest sannsynlig.

☐ Du får to seksere på rad.

☐ Du får en sekser.

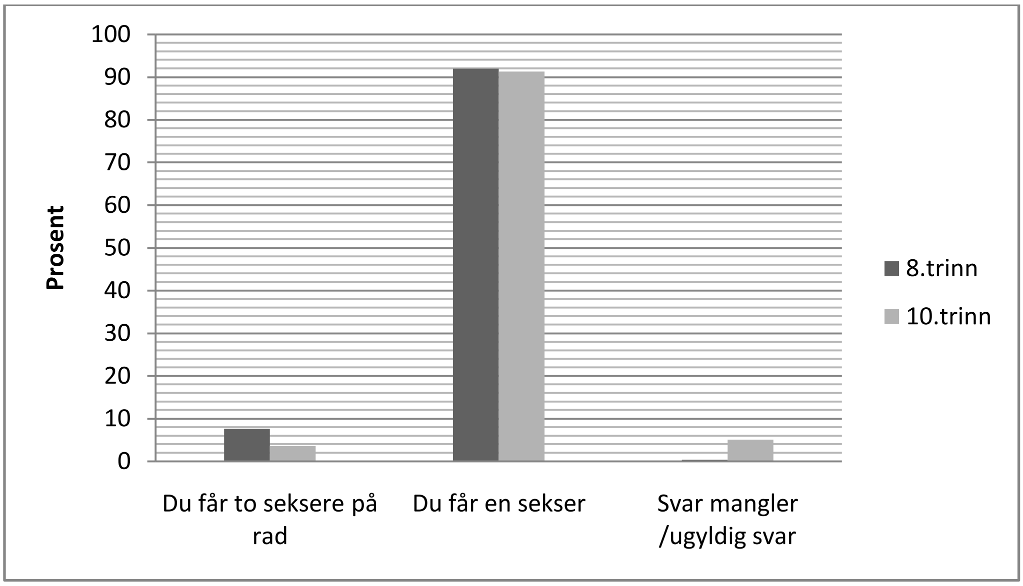
Utfordringen for elevene i denne oppgaven er først og fremst å se at når du har fått to seksere så har du samtidig fått en. Riktig svaralternativ er derfor: *du får en sekser*. Dette er i utgangspunktet mengdelære, som er en del av kompetansemålene etter 2.årstrinn. Elevene ble på denne oppgaven ikke bedt om å begrunne svarene, fordi oppgaven fungerer mest som en kontrolloppgave til oppgave 4.

Tabell 5.5: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 2.

	Frekvens	Prosent
Du får to seksere på rad	29	6,0
Du får en sekser	444	91,7
Krysset av for begge	9	1,9
Svar mangler	2	0,4
Sum totalt	484	100,0

De aller fleste svarte riktig på denne oppgaven, bare 7,9 % av elevene hadde svart feil eller krysset av begge alternativene.

Figur 5.4: Diagram over svar til oppgave 1, med fordeling på trinn.



Dersom man krysser resultatene fra oppgave 2 mot hvilke trinn elevene går på, så ser man at det er liten forskjell på antall rette på de to trinnene. 8.trinns elevene svarte 92,3 % riktig, mot 91,8 % på 10.trinn. Det er altså ikke ved første øyekast noen forbedring gjennom skoleløpet på denne problemstillingen. Blant de elevene som ikke har krysset av for riktig svar, kan man se et mønster. Alle de 9 elevene som krysset av på begge svaralternativene gikk på 10.trinn på samme skole med samme lærer. Siden det var mattelærerne i hver enkelt klasse som gjennomførte testen med sin klasse, så er det vanskelig å si noe om hva slags instruksjon og veiledning som ble gitt utover det som var avtalt. Dersom man bare ser på antall elever som krysset av på svaralternativet "Du får to seksere på rad", så er det en forsiktig forbedring fra 8.trinn til 10.trinn, siden 22 elever på 8.trinn krysset av for dette alternativet mot 7 elever på 10.trinn. Siden så få elever svarte feil på denne oppgaven kan man tenke seg at feilprosenten i stor grad representerer de elevene som gjetter uten å sette seg for mye inn i oppgaven.

Figur 5.5: Oppgave 4.

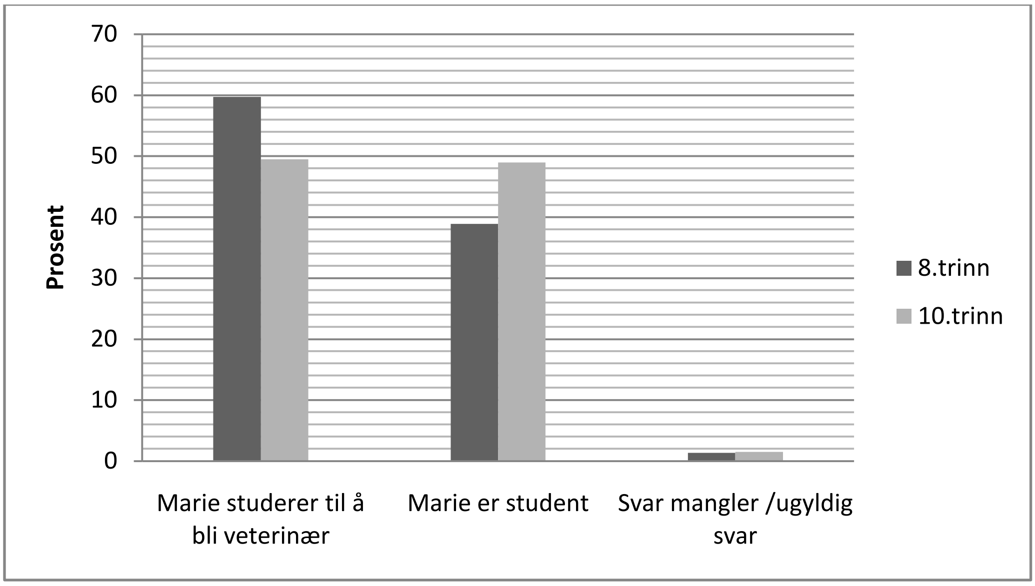
Marie har alltid vært interessert i dyr, og hun rir mye. Faren hennes er veterinær. Før hun begynte å studere, da hun gikk på ungdomsskolen og på videregående skole, var hun i stallen nesten hver dag.

Kryss av ved det som er mest sannsynlig:

- ☐ Marie studerer til å bli veterinær.
- ☐ Marie er student.

Oppgave 4 tester i utgangspunktet det samme som oppgave 2, men i en sosial setting i stedet for i en setting som de fleste elevene gjenkjenner som matematisk. Dersom Marie studerer til å bli veterinær så er hun samtidig student, mens hun kan godt være student uten å studere til å bli veterinær. Riktig svar her blir: *Marie er student.*

Figur 5.6: Diagram over svar til oppgave 1, med fordeling på trinn.



10.trinnselevene gjør det bedre enn 8.trinnselevene, 49 % har svart riktig på 10.trinn, mens 39,4 % har svart riktig på 8.trinn. De få som har krysset av for begge svaralternativene, er igjen fra samme skole, trinn og lærer som de som krysset av for begge i oppgave 2. Et flertall av elevene har svart feil på denne oppgaven, bare 43 % har svart riktig.

Tabell 5.6: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 4.

	Frekvens	Prosent
Marie studerer til å bli veterinær	269	55,6
Marie er student	208	43,0
Krysset av for begge	3	0,6
Svar mangler	4	0,8
Sum totalt	484	100,0

Resultatet bekrefter langt på vei Watson (2005) sin påstand om at loven om konjunksjon (conjunction fallacy) har større tilbøyelighet til å gjelde i sosiale settinger enn i matematiske. Det er mulig at oppgave 4 ikke oppfattes som matematisk selv om den ble gitt som en del av en mattetest i en matematikktime.

De 29 elevene som krysset av for ”du får to seksere på rad” på oppgave 2, svarte ikke noe særlig mer feil på oppgave 4, enn resten av elevene. Av de 29 elevene svarte 17 ”Marie studerer til å bli veterinær”, mens 12 svarte ”Marie er student”. Oppgavene 2 og 4 var ment å teste det samme i ulike settinger. Likevel ser det ut til at de elevene som gjør konjunksjonsfeil i en matematisk setting, ikke nødvendigvis faller for den samme misoppfatningen i en sosial setting. Dette kan tyde på at vi har å gjøre med to adskilte feilforestillinger i stedet for grader av en.

5.3 Oppgave 3

Figur 5.7: Oppgave 3.

I et lotteri er det 100 lodd. Ett av ti lodd gir gevinst.

Hva er det minste antall lodd du må kjøpe for å være helt sikker på å få minst en gevinst?

- ☐ 10 lodd.
- ☐ 55 lodd
- ☐ 91 lodd
- ☐ 100 lodd

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

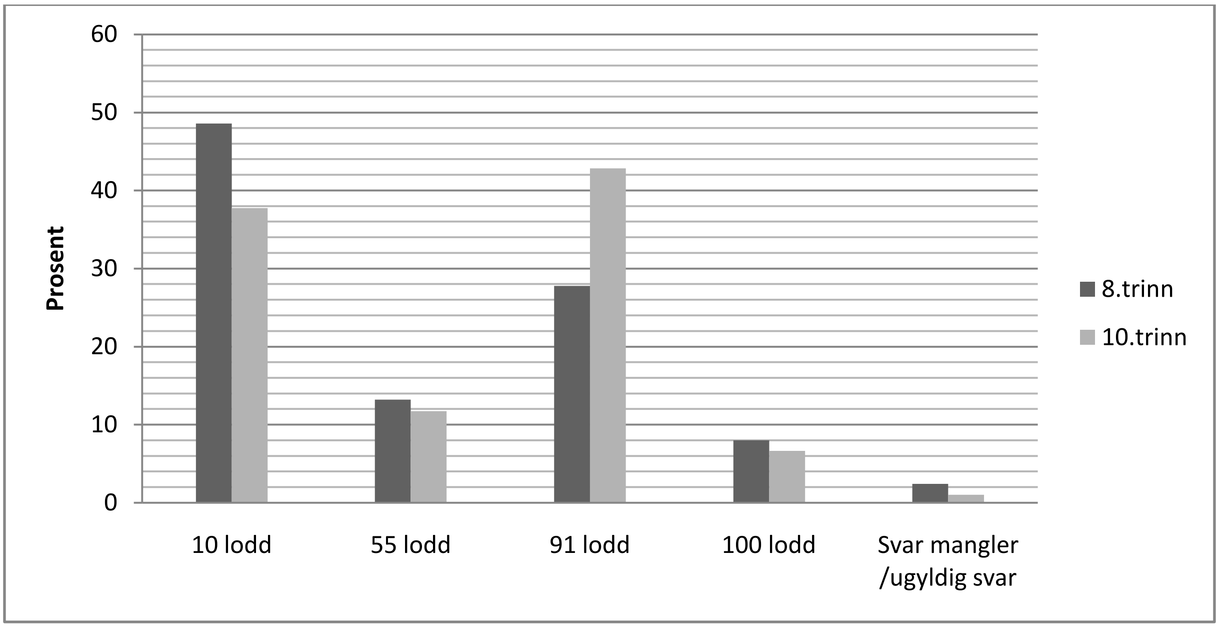
Riktig svar på denne oppgaven er: 91 lodd. Siden det er 10 vinnerlodd er du ikke sikker før det er mindre enn 10 lodd igjen.

Til kategorien *svar mangler/ugyldig svar* i tabellen under, var det foruten de elevene som ikke hadde svart på oppgaven, 5 elever som hadde krysset av for flere svaralternativer.

Tabell 5.7: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 3.

	Frekvens	Prosent
10 lodd	214	44,2
55 lodd	61	12,6
91 lodd	164	33,9
100 lodd	36	7,4
Svar mangler/ugyldig svar	9	1,8
Sum totalt	484	100.0

Figur 5.8: Diagram over svar til oppgave 3, fordelt på trinn



5.3.1 Forklaringer til ”10 lodd”

Tabell 5.8: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 1 til oppgave 3.

	Frekvens	Prosent
Fordi ett av ti lodd gir gevinst	153	31,6
Andre svar	7	1,4
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	54	11,2

54 av de 214 elevene som valgte dette svaralternativet gav enten ingen forklaring, *vet ikke-svar* eller *ser slik ut- svar*. 7 elever kom med svar de var ganske alene om. Det store flertallet på 153 elever, eller over 70 % av de elevene som valgte dette svaralternativet, gav ulike forklaringer som gikk ut på at ett av ti lodd gir gevinst. De fleste av disse elevene gav få eller ingen forklaringer utover ulike versjoner av at ett av ti lodd gir gevinst.

Slik jeg ser det, kan det være særlig to misoppfatninger ”begravd” her. Den ene mulige misoppfatningen er at de ikke har oppfattet at loddene trekkes tilfeldig selv om ett av ti gir gevinst. Dette kan bety at de ikke har forstått at poenget med et lotteri, nemlig er at loddene trekkes tilfeldig, med mindre det jukses. De har hektet seg opp i setningen ”ett av ti lodd gir gevinst” og forstått det slik at hvert tiende lodd som trekkes vil gi gevinst. Den andre trolige misoppfatningen er at de tror at vinnerloddene fordeler seg mest mulig utover trekningene. Dette er en misoppfatning som kalles heuristisk representativitet. (Shaughnessy, 1977) De knytter sannsynligheten av å trekke lodd direkte til fordelingen av ulike lodd. Dersom eleven bare har svart ”Ett at ti lodd gir gevinst” er det vanskelig å avgjøre hvilke av disse to misoppfatningene som er gjeldende, eller om det er en annen grunn til at de har svart som de har gjort.

Her er to eksempler på forklaringer som inneholder litt mer enn bare at ett av ti lodd gir gevinst:

- Elev #66 (gutt, 8.trinn): ”Det står at man må vinne, hvis man kjøper 10 stk.”
- Elev #286 (jente, 8.trinn): ”Jeg tenkte at hvis 1/10 lodd gir gevinst, så er det 10/100 lodd som gir gevinst, så hun kan få gevinst på 10 lodd.”

Hos den første eleven er det sannsynligvis den første misoppfatningen som har gjort seg gjeldende. Han gir inntrykk av at han ikke har forstått premissene for et lotteri. Selv om den første misoppfatningen også kan være årsak til at den andre eleven har svart som hun har gjort, så viser hun litt usikkerhet om det er helt sikkert at det kommer en gevinst på 10 lodd. Det at hun beskriver en forventning om en gevinst på 10 lodd kan bety at vi har å gjøre med den andre misoppfatningen. Det er 12 elever som viser en slik usikkerhet i forklaringene sine.

Det kan synes som om dette er misoppfatninger som avtar noe med alder. 49,3 % av elevene på 8.trinn valgte dette svaralternativet, mens prosenten på 10.trinn var 37,9 %. Når det gjelder fordeling på kjønn, så er jentene litt overrepresentert på dette svaralternativet i forhold til guttene, siden 48,2 % av jentene krysset av her, mot 41,5 % av guttene.

5.3.2 Forklaringer til ”55 lodd”:

Svaralternativet ”55 lodd” var med i oppgaven først og fremst av to grunner. For det første for å få et ekstra svaralternativ å velge mellom, deretter for at svaralternativet ”91 lodd” ikke skulle skille seg for mye fra alternativene ”10 lodd” og ”100 lodd”, som var svært runde tall. På tross av dette har hele 61 elever (12,6 % av elevene i undersøkelsen) valgt dette svaralternativet, og over halvparten av disse har begrunnet svarene sine med annet enn *vet ikke svar* eller *ser slik ut svar*. Noen få elever, 6 stykker, mener at 55 lodd er nok til å være sikker på å vinne, mens de fleste av de som har begrunnet svaret sitt, 30 stykker, ikke er like skråsikre. De svarer at 55 lodd burde være nok til å vinne, eller at ti lodd ikke er nok til å være sikker på å vinne. Mulige misoppfatninger her kan være løsningstilnærming og representativitet. Dersom de har valgt svaralternativet ut fra at det er mer sannsynlig å vinne enn å tape her, så har de sannsynligvis brukt løsningstilnærming. To elever som kan ha brukt løsningstilnærming er:

- Elev #2 (jente, 8.trinn): ”Hvis du har kjøpt 55 lodd, og det er en gevinst i et av ti lodd, så har du på en måte fem og en halv sjanser. Det er ofte nok til å vinne”
- Elev #38 (gutt, 8.trinn): ”fordi hvis du kjøper 10 lodd er du ikke helt sikker på at du har fått et vinnerlodd men hvis du kjøper 55 lodd er kjansen stor for at du har fått et vinnerlodd”

Disse elevene har sett det som sin oppgave å vurdere når du har kjøpt nok lodd, til at det er større sannsynlighet for å vinne enn å tape.

Den mulige misoppfattningen om representativitet i det første svaralternativet kan ha gjort seg gjeldende til dette svaralternativet også. Det at elevene uttrykker en forventning om en viss fordeling av gevinster, uten å ha gjort noen beregninger på fordelingen, tyder på dette. De har bare følt at man ikke er sikker med bare ti lodd. Andelen av elever på 8.trinn og 10.trinn som har krysset av for dette svaralternativet, er omtrent det samme – 13,4 % mot 11,8 %. Dersom man bare ser på de som har gitt forklaringer som: *55 lodd burde være nok til å vinne*, eller *ti lodd ikke er nok til å være sikker på å vinne*, så ser man at det er forskjell på trinnene. Andelen som svarer dette synker med nesten 40 % når man ser på svarene på 8.trinn i forhold til svarene på 10.trinn. Den misoppfatningen som genererer disse forklaringene, synes å være mindre vanlig jo eldre elevene er, eller jo mer formell undervisning elevene har hatt i emnet sannsynlighet.

5.3.3 Forklaringer til ”91 lodd”:

Her har et klart flertall av elevene som krysset av for dette svaralternativet gitt en riktig forklaring til problemet.

Tabell 5.9: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 3 til oppgave 3.

	Frekvens	Prosent
Riktig forklaring	121	25,0
91 lodd burde være nok til å vinne	8	1,7
Ingen forklaring / ser slik ut	35	7,2

Selv om ingen av elevene sier at de gjetter, så er det mulig at noen har gjettet blant de elevene som uttrykker en forventning om at 91 lodd er nok eller de som har gitt *ser slik ut- svar* eller ingen forklaring. Det er en klar økning riktige svar på 10.trinn i forhold til 8.trinn, som man kan se i figur 5.7. Andelen som svarer riktig på 10.trinn er 15,1 % høyere enn på 8.trinn.

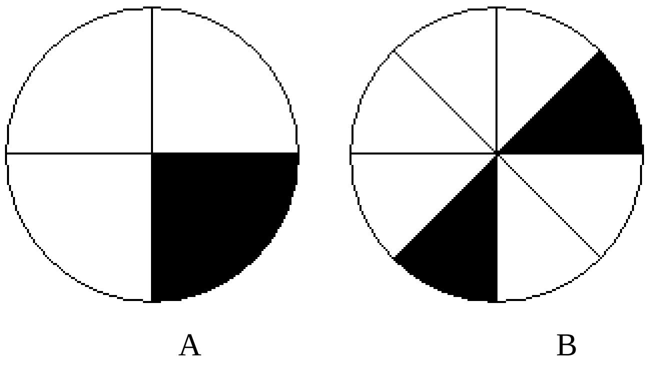
5.3.4 Forklaringer til ”100 lodd”:

23 elever, eller 4, 8 % av elevene i undersøkelsen, har gitt ulike forklaringer, som går ut på at du må kjøpe alle loddene for å være sikker på å vinne. Utover de som ikke har gitt noen forklaringer, eller de som har gitt *ser slik ut- svar*, så er det bare 3 elever som har gitt en annen forklaring. Her må det være en misoppfatning, der elevene har festet seg ved ordene ”helt sikker” i oppgaven, og hvor de mener at ingen ting er helt sikkert før alle loddene er trukket. De har ikke tenkt noe over hvor mange lodd det er mulig å tape med. Et eksempel er elev #264 (jente, 8.trinn): ”Da har du kjøpt alle loddene og da er det sikkert du får en gevinst.”

5.4 Oppgave 5

Figur 5.9: Oppgave 5.

Både lykkehjul A og B gir gevinst når viseren stopper på sort felt.



Hvilken påstand er riktig:

- ☐ Du har størst vinnersjanse med lykkehjul A.
- ☐ Du har størst vinnersjanse med lykkehjul B.
- ☐ Du har like stor sjanse på begge lykkehjulene.

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

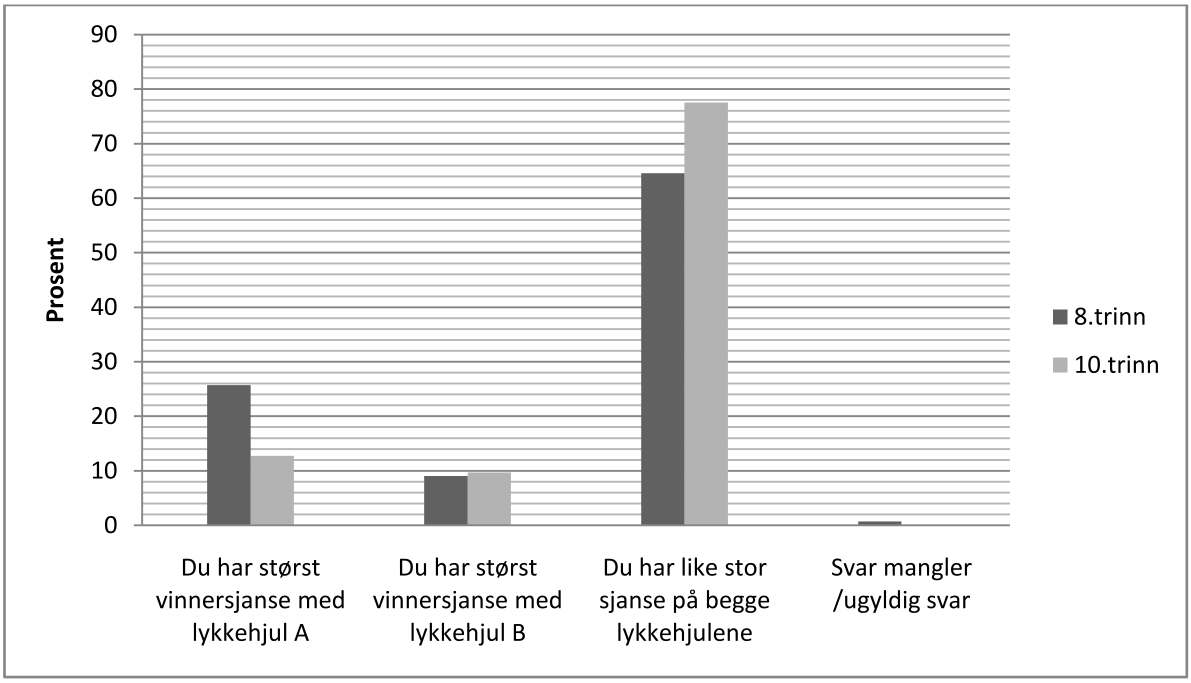
Selv om feltene man kan vinne på, med begge lykkehjulene, har forskjellig størrelse og antall, så utgjør de en like stor del av hele lykkehjulet. 25 % av begge lykkehjulene er sort. Riktig svar på denne oppgaven er: *du har like stor sjanse på begge lykkehjulene.*

Resultatet av elevenes avkryssing på oppgave fem er satt inn i tabellen og diagrammet under. Dette er en av de oppgavene som har hatt stor svarprosent. Bare 1 elev i undersøkelsen valgte ikke å svare på denne oppgaven. Det var bare 14,4 % av elevene som ikke gav en forklaring på svaret de valgte.

Tabell 5.10: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 5.

	Frekvens	Prosent
Du har størst vinnersjanse med lykkehjul A.	99	20,5
Du har størst vinnersjanse med lykkehjul B.	45	9,3
Du har like stor sjanse på begge lykkehjulene.	338	69,8
Svar mangler/ugyldig svar	2	0,4
Sum totalt	484	100.0

Figur 5.10: Diagram over svar til oppgave 5, fordelt på trinn.



5.4.1 Forklaringer til "Du har størst vinnersjanse med lykkehjul A"

Bak 'andre forklaringer' i tabellen under ligger svar som går ut på: at de ikke vet, at de sier at slik er det, forklaringer de er ganske alene om. I tillegg er det fire elever som har gjort en riktig utregning, men har krysset av her likevel.

Tabell 5.11: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 1 til oppgave 5.

	Frekvens	Prosent
Fordi feltene er større	27	5,6
Fordi det er færre felter	31	6,4
Andre forklaringer	21	4,3
Ingen forklaring	20	4,1

Til dette svaralternativet er to misoppfatninger godt representert. Den ene er at elevene mener at det er størst sannsynlighet for å vinne når feltene på lykkehjulet er store, mens den andre er at elevene mener at vinnersjansen er størst fordi det er færre felter. Bare to elever, under kategorien andre forklaringer i tabellen, har begrunnet svaret med begge disse misoppfatningene.

Et eksempel til hver av misoppfatningene:

- Elev #33 (gutt, 8.trinn): ”Dem er større deler. lettere sjanse og få gevinst.”
- Elev #136 (gutt, 8.trinn): ”hvis man snurrer A har man større sjanse siden feltet er større”

Felles for nesten alle de som har begrunnet valget sitt med større felter eller færre felter er at de ikke forklarer hvorfor det at det er større felter eller færre felter i A, gjør at sannsynligheten for å vinne er størst her. Intuitivt er det lettere å forstå hvorfor noen elever mener det er størst sjanse for å vinne med store felter, enn å forstå hvorfor færre felter gir større vinnersjanse. Dersom de ikke ser at de to svarte feltene i B er like store til sammen som i A, så er det forståelig at det store feltet i A kjennes større ut enn de små i B. En elev som har begrunnet valget sitt litt mer, er elev #343 (jente, 10.trinn): ”Fordi det er større område å stoppe på. Det er vanskeligere å stoppe på et av de små.” Hun har ikke begrunnet svaret sitt ut fra matematikk, men ut fra en forståelse av den fysiske situasjonen. Når det gjelder færre felter er det, dersom eleven har telt riktig antall felter og ikke tar hensyn til forhold, i hvert fall to varianter av misoppfatningen. Enten tror eleven at sannsynligheten øker med færre muligheter, eller så tror eleven at sannsynligheten øker fordi det er flere muligheter på det andre lykkehjulet.

5.4.2 Forklaringer til ”Du har størst vinnersjanse med lykkehjul B”

Bare 45 elever valgte dette svaralternativet. De ulike forklaringene er representert i tabellen under. Fire av de elevene som ligger under *andre forklaringer* hadde gjort forsøk på å regne det ut, men fått feil svar.

Tabell 5.12: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 2 til oppgave 5.

	Frekvens	Prosent
Fordi det er flere felter	19	3,9
Fordi feltene er spredt	9	1,9
Andre forklaringer	5	1,0
Ingen forklaring	12	2,5

Også her ser det ut til å være to misoppfatninger som gjør seg gjeldende. Den vanligste, fordi det er flere felter, ligner på den andre misoppfatningen til svaralternativ 1, bare motsatt vei. Her mener altså en del elever at sannsynligheten øker jo flere felter det er. Ni elever har valgt lykkehjul B fordi vinnerfeltene er spredt. Oppgaven ble designet for blant annet å kontrollere om elevene mente at vinnersjansen øker når antall mulige vinnerfelt øker, uten at forholdet forandrer seg. Denne misoppfatningen er tilsynelatende der, selv om antall elever som går for den forklaringsmodellen er relativt få. En feilkilde her kan være at noen av disse elevene har telt feil antall felter før de har vurdert sannsynligheten.

5.4.3 Forklaringer til "Du har like stor sjanse på begge lykkehjulene"

Et flertall av elevene i undersøkelsen, 338 elever eller 69,8 %, har valgt dette svaralternativet. Omtren halvparten av disse har regnet ut sannsynligheten på lykkehjul A og B på riktig måte. Blant resten av forklaringene er det to varianter som dominerer. Enten har de observert at de sorte feltene blir like store om du legger dem sammen, eller så skriver de at forholdet mellom sort og hvit er det samme på de to lykkehjulene.

Tabell 5.13: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 1 til oppgave 3.

	Frekvens	Prosent
Riktig utregning	170	35,2
Feltene blir like store om du legger dem sammen	89	18,4
Forholdet mellom sort og hvit er likt i begge	21	4,3
Andre svar	5	1,0
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	54	10,9

5.4.4 Forskjell på trinnene

Det er liten forskjell på hvordan jenter og gutter har besvart denne oppgaven, men det er en tydelig forskjell på trinnene, noe man kan se diagrammet i figur 5.9. Andelen riktige svar, svaralternativ 3, er noe høyere på 10.trinn enn på 8.trinn, 64,6 % av 8.trinnselevene mot 77,6 % av 10.trinnselevene. Der forskjellen er størst, er på svaralternativ 1, hvor andelen avkrysninger ble halvert fra 8.trinn til 10.trinn. De to misoppfatningene som dominerer på dette svaralternativet, at sannsynligheten øker når det er større felter eller når det er færre felter, ser ut til nesten å forsvinne. Mens 49 elever på 8.trinn har kommet med disse forklaringene, er det bare 9 elever på 10.trinn som gjør det samme.

5.5 Oppgave 6

Figur 5.11: Oppgave 6.

Du skal spille et spill. Spillet går ut på at deltakerne først velger ett tall fra 0 til 12. Så kastes to terninger. Antall øyne på de to terningene legges sammen. Den som gjetter riktig vinner. Spørsmålet er da: Hvilket tall bør du velge for å ha størst sjanse til å vinne? Svar:____________ Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Denne oppgaven ble lagd for å se hva slags vurderinger elevene gjør i en konkret situasjon, hvor utfallsrommet er av stor betydning. Et spørsmål er om elevene gjør beregninger eller vurderinger av utfallsrommet før de bestemmer seg for hva som gir størst sjanse. Selv om det er 11 eller 13 mulige svar, avhengig om du tar med 0 og 1, så er det 36 mulige kombinasjoner terningene kan falle ned på. De forskjellige kombinasjonene er satt inn i tabellen under.

Tabell 5.14: Oversikt over antall kombinasjoner med to terninger.

Svar	Kombinasjoner
2	1-1
3	1-2, 2-1
4	1-3, 2-2, 3-1
5	1-4, 2-3, 3-2, 4-1
6	1-5, 2-4, 3-3, 4-2, 5-1
7	1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1
8	2-6, 3-5, 4-4, 5-3, 6-2
9	3-6, 4-5, 5-4, 6-3
10	4-6, 5-5, 6-4
11	5-6, 6-5
12	6-6

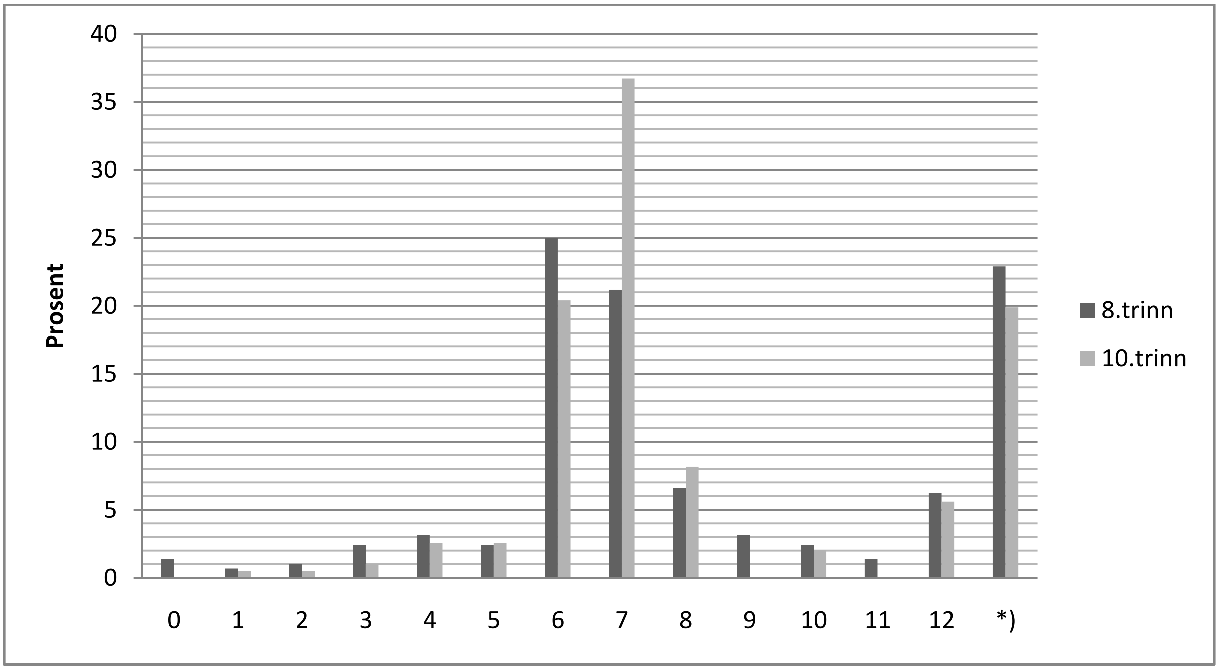
I tabellen ser man at svaret 7 er riktig, fordi det er flest kombinasjoner som gir svaret 7. Det er riktignok fullt mulig å svare riktig på oppgaven uten å gjøre disse beregningene, og i stedet støtte seg på erfaringer. Dersom man har kastet to terninger, og det er mange spill hvor dette er en del av spillet, så vil man etter hvert erfare at summene på midten kommer oftere enn resten. Resultatet av elevenes svar på oppgaven er satt inn i tabellen og diagrammet under.

Tabell 5.15: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 6.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*)	Sum
Frekvens	4	3	4	9	14	12	112	133	35	9	11	4	29	105	484
Prosent	0,8	0,6	0,8	1,9	2,9	2,5	23,1	27,5	7,2	1,9	2,3	0,8	6,0	21,7	100

*) Ingen svar/ugyldig svar.

Figur 5.12: Diagram over svar til oppgave 1, fordelt på trinn.



*) Ingen svar/ugyldig svar.

Elevenes svar har spredt seg utover alle svarene som var mulig i oppgaven, men noen svar har høyere frekvens enn de andre. 8.trinnselevene har spredt seg utover alle svarene, mens ingen 10.trinnselever har valgt svarene 0, 9 og 11. Det er spesielt svarene *ingen svar/ugyldig svar*, 6 og 7 som har fått et stort antall treff. I tillegg har et interessant antall elever krysset av for 8 og 12. Resten av svaralternativene har fått fra 3 til 14 svar, med en tendens til at de, med noen unntak, øker mot midten av tallrekka/svaralternativene. Andelen elever som har valgt ikke å svare på denne oppgaven, er forholdsvis høyt, hele 43 elever. Dette kan muligens forklares med at oppgaven er forholdsvis vanskelig i forhold til andre i oppgavesettet, og at elevene her måtte skrive svaret i stedet for bare å krysse av, dersom de var usikre. Den andre store gruppen med elever som inngår i kategorien *ingen svar/ugyldig svar*, er de 61 elevene som har svart flere alternativer, eller har begrunnet det at de ikke har valgt et alternativ. Omtrent halvparten av disse hevder at det er det samme hvilke tall du velger, at det er lik sannsynlighet for alle tallene, selv om noen av dem har sett at 0 og 1 ikke er mulige svar. For eksempel elev #343 (jente, 10.trinn): svarte 9 – ”Jeg bare svarte et tall. Det er like stor sannsynlighet å få hvilket som helst tall.” Her er det en misoppfatning, sannsynligvis fra erfaringer elevene har gjennom oppgaver og arbeid på skolen, om at det i sannsynlighet alltid er lik sannsynlighet i de forskjellige trekningene. Elevenes første møte med sannsynlighet er jo uniform sannsynlighet, gjennom tilfeller som å kaste kron og mynt, kaste en terning, trekke kuler opp av en krukke, lykkehjul, etc.

Begrunnelsene til de som har svart 7, sortert etter kategorier, er satt inn i tabellen under. 65 av de elevene som valgte svaret 7, har gitt en forklaring som viser at de har forstått at antall ulike svar ikke er det samme som utfallsrommet i denne oppgaven. 10.trinnselevene gjør det tydelig bedre på denne oppgaven. Andelen elever på 10.trinn som har svart riktig er 15,6 % høyere enn andelen av elevene som har svart riktig på 8.trinn. Spesielt er det forklaringen om at det er flest kombinasjoner som gir 7 som øker blant 10.trinnselevene. Mens 16 elever gav denne forklaringen på 8.trinn, var det 33 elever som gav den samme forklaringen på 10.trinn.

Tabell 5.16: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaret 7 til oppgave 6.

	Frekvens	Prosent
Flest kombinasjoner gir 7	49	10,1
Elever som setter opp kombinasjoner	16	3,3
Vinner ofte med	10	2,1
Andre svar	2	0,4
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	56	11,6

10 elever forklarer valget sitt med hverdagsforestillingen om at de har en erfaring om at de ofte får 7 på to terninger. For disse ti elevene så har denne hverdagsforestillingen gjort at de har svart riktig, uavhengig av hvor tilfeldig det er. 18 andre elever har svart feil med samme begrunnelse. For eksempel disse to:

- Elev #59 (gutt, 8.trinn): svarte 6 – ”Fordi 4 og 2 er vanlige å få.”
- Elev #35 (jente, 8.trinn): svarte 6 – ”Fordi du får det ofte”

Med unntak av svaret 10, så har elever valgt alle mulige svar mellom 2 og 12, med begrunnelsen at det er vanlig å få det tallet, eller at du vinner ofte med det tallet. Ti av dem har truffet i nærheten av riktig svar med å velge 6 eller 8. Det er klart at her er det en misoppfatning av typen heuristisk representativitet hvor elever prøver å bruke, med vekslende hell, tidligere erfaringer til å forutsi hva svaret er.

En annen misoppfatning som kommer frem, er at det som er i midten har størst sannsynlighet. Dette er nok også en form for heuristisk representativitet, siden det er en mengde dagligdagse tilfeller hvor resultatene følger en tilnærmet gausskurve. Hele 32 elever begrunner svaret 6 med at det er midt i mellom, eller halvparten av 12. Et eksempel på det er elev #252 (jente, 8.trinn): svarte 6 – ”fordi 6 + 6 = 12” To elever har til og med valgt svaret 3 med begrunnelsen at det er halvparten av 6. Denne misoppfatningen avtar tydelig med alder. 27 elever på 8.trinn skrev at de valgte 6, fordi det er halvparten av 12, eller midt i mellom. På 10.trinn var det bare 5 elever som gjorde det samme. Ofte kan denne misoppfatningen eller hverdagsforestillingen være en grei måte å komme fram til svaret på, når man ellers ikke har noen ide om hva man skal svare. Tross alt har mange elever kommet i nærheten av riktig svar med denne begrunnelsen.

6,0 prosent eller 29 elever av de 484 elevene som deltok i undersøkelsen, svarte at de mente at de bør velge tallet 12 for å ha størst sjanse for å vinne. Nitten av disse begrunnet svaret med at 12 er det største tallet. Eksempel på dette: elev #395 (jente, 10.trinn): svarte 12 – ”Hvis du får to 6’ere, får du 12 som sum, og det er jo den høyeste summen”, og elev #251 (jente, 8.trinn): svarte 12 – ”12, fordi det er det største og stor sannsynlighet for at du får.” Misoppfatningen her synes å være at man i spill ofte vinner med det som er størst. For eksempel de største tallkombinasjonene i yatzy, den høyeste kort- kombinasjonen i poker, det høyeste budet i en auksjon, etc. For å komme til den konklusjonen må de se bort fra alt de skulle ha lært innen emnet sannsynlighet.

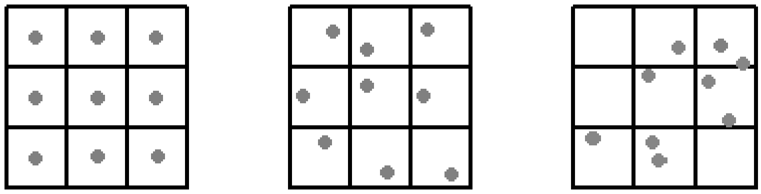
15 elever har valgt svaret 8 med begrunnelsen at det er mange kombinasjoner som gir 8, eller har satt opp kombinasjoner som gir 8. Disse elevene ha forstått at sannsynligheten ikke er lik til alle mulige svar, og at du har størst sjanse når du velger det svaret som har flest kombinasjoner. Det de har gjort galt er at de ikke har hatt en systematisk metode hvor de kommer fram til alle kombinasjonene.

5.6 Oppgave 7

Figur 5.13: Oppgave 7

En gutt har lekt med treklosser ute. Da han slutter å leke, har han satt sammen ni klosser til et kvadrat. Etter en stund begynner det å regne. Det du skal tenke på, er hvor de ni første regndråpene som treffer klossene havner. Under er det tegnet tre mulige forslag.

Etter at ni dråper har falt, hvilke av de tre forslagene under ser mest ut slik du vil forvente?



A B C

☐ A

☐ B

☐ C

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Ordlyden i denne oppgaven, som ligner den Green(1986) brukte på barneskoleelever, er viktig. Elevene blir spurt om hva de forventer, ikke hva som er sannsynlig. Dersom elevene hadde blitt spurt om hvilket svar som hadde vært mest sannsynlig, så kunne svaret vært at alle er like sannsynlig. På samme måte som å få fire mynt på rad, når man slår mynt og kron med et kronestykke, er like sannsynlig som å få rekkefølgen mynt-kron-kron-mynt. Begge disse tilfellene representerer bare ett utfall uten at antall mulige utfall blir forandret. Meningen med oppgaven er å sjekke hvordan elever forstår tilfeldighet. Begrepet tilfeldighet kan være vanskelig for elever. De ser ofte etter symmetrier og mønstre, noe som gjerne kan være ubevisst når de ser etter det motsatte. Riktig svar her er svaralternativ C.

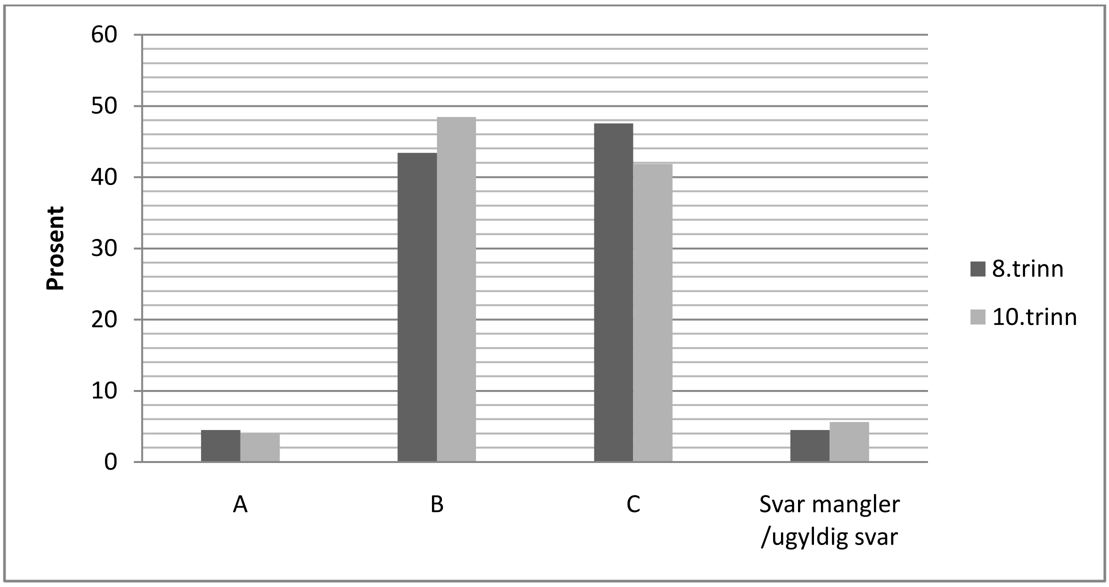
Resultatet er satt inn i tabellen under. Vanskegraden på denne oppgaven er muligens noe høyere enn de fem første oppgavene, noe som kan spores i at antallet blanke svar øker. 13

elever valgte ikke å svare på denne oppgaven. Man kan også forvente en økning i blanke svar mot slutten av oppgavesettet fordi en del elever går lei etter å ha svart på en del oppgaver.

Tabell 5.17: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 7.

	Frekvens	Prosent
A	21	4,3
B	220	45,5
C	219	45,2
Svar mangler/ugyldig svar	24	5,0
Sum totalt	484	100

Figur 5.14: Diagram over svar til oppgave 7.



5.6.1 Forklaringer til "A"

Bare 21 elever har valgt dette svaralternativet. Utover de elevene som hadde *ingen forklaring*, eller som gav svar av typen *ser slik ut*, så var det forklaringsmodeller som:

- Elev #36 (gutt, 8.trinn): ”fordi regndråpene faller spredt”
- Elev #88 (gutt, 8.trinn): ”Fordi på begynnelsen høres det ut som om at det er fint vær Og når det begynner å regne så detter rett ned”

Det er for få elever som har gitt slike forklaringer til å kunne si noe endelig, men svarene antyder at elevene har en misoppfatning om at dråpene skal være spredt mest mulig jevnt utover for at de skal oppfatte det som tilfeldig. Det er nesten bare gutter på 8.trinn som har gitt slike forklaringer. Man må kunne trygt si at de elevene som har krysset av her ikke kan ha et utviklet forhold til begrepet tilfeldighet.

5.6.2 Forklaringer til ”B”

I svaralternativ B er det en regndråpe i hver rute, men plasseringen til regndråpen inne i ruta er tilfeldig. Elevenes ulike forklaringer er sammenfattet i tabellen under.

Tabell 5.18: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 2 til oppgave 7.

	Frekvens	Prosent
Når elevene begrunner at de ikke har valgt A eller C	47	9,7
Dråpene er mest spredt/mest tilfeldig her	64	13,2
Fordi dråpene treffer hver rute	19	3,9
Andre svar	4	0,8
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	86	17,8

Blant de elevene som har begrunnet at de ikke valgte A eller C, har nesten alle skrevet at de ikke valgte A fordi den så for symmetrisk, for ordnet eller fordi det ser bare feil ut. Mens flesteparten, 39 stykker av dem, skrev at de ikke valgte C fordi dråpene var for samlet eller at dråpene der hadde klumpet seg sammen. Eksempler på dette er:

- Elev #27 (gutt, 8.trinn): ”Regn faller ikke som på A, og på C er regndråpene for tett sammen”
- Elev #383 (jente, 10.trinn): ”Jeg svarte B fordi A var for symmetrisk, og C litt for ’tett’, B var midt i mellom”

Selv om omtrent halvparten av elevene som skriver at de har observert at det er en dråpe i hver rute, samtidig argumenterer for valget sitt med at dråpene er mest spredt her, så valgte jeg å samle disse svarene i kategorien ’fordi dråpene treffer hver rute’. Grunnen til det er at de har oppdaget et mønster i svaralternativ B, men har likevel valgt å svare dette.

For de fleste forklaringene under kategorien ’dråpene er mest spredt/mest tilfeldig her’ er det felles at de ikke kommer med forklaringer på hvorfor spredningen er størst her. Det er da vanskelig å avgjøre om de har funnet et mønster, eller om de mener det er minst mønster der. 17 av de 64 forklaringene som er plassert under denne kategorien, går litt lengre. De vil at dråpene skal være spredt, men ikke for spredt, eller ikke ”for sammen”.

Mange av de elevene som har krysset av for dette svaralternativet, har bare en delvis forståelse av begrepet tilfeldighet, og det er to typer misoppfatninger som blir tydelige gjennom disse forklaringene. Enten har elevene funnet et mønster for det de oppfatter som tilfeldig, slik som de som har sett at det er en dråpe på hver kloss. Eller så har de i jakten på tilfeldighet sett etter et svaralternativ hvor dråpene er spredt mest mulig utover, noe som i seg selv er et mønster.

5.6.3 Forklaringer til ”C”

Blant de elevene som har kommet med en forklaring, utover svar i kategoriene *vet ikke* eller *ser slik ut*, er det to forklaringsmodeller som dominerer. De som har observert at det ikke er en dråpe på hver kloss, og de som mener det ser mest tilfeldig ut her.

Tabell 5.19: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 3 til oppgave 7.

	Frekvens	Prosent
Forventer ikke/ikke sannsynlig med en dråpe på hver kloss	53	11,0
Mener det ser tilfeldig ut/ikke mønster	64	13,2
Andre svar	21	4,3
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	81	16,7

I kategorien 'forventer ikke/ikke sannsynlig med en dråpe på hver kloss' har litt over halvparten brukt ordet sannsynlig, mens litt under halvparten brukt ordet forventer. Det er ikke alltid like lett å si i hvilken stor grad de, som bruker ordet sannsynlighet, har en fullgod bevisst forståelse av tilfeldighet. Spørsmålet er i hvor stor grad valget er intuitivt eller ikke. Felles for disse forklaringene er at elevene har funnet et mønster, og derfor velger det alternativet med minst mønster. Et eksempel på svar: elev #474 (jente, 10.trinn): "Regndråpene faller hvor de vil, og kan til og med falle på linjene. Det er ikke sannsynlig at en regndråpe skal falle i hver sin rute."

På denne oppgaven går svarprosenten på det riktige alternativet ned fra 8.trinnselevene til 10.trinnselevene, med 5,8 %. Man ville forvente at jo mer formell undervisning jo bedre vil resultatet bli. Alle 10.klassingene har i perioden, før de fikk denne testen, gjennomgått sannsynlighet som repetisjon før tentamen og eksamen. En mulig forklaring på dette er at formell undervisning i klassisk sannsynlighet, hvor fokus blir lagt på at hvert enkelt utfall har lik sannsynlighet, har generert misoppfatninger i tilfeller hvor hvert enkelt utfall ikke er viktig. Det er i første rekke på 10.trinn at elever har krysset av på flere svaralternativer.

Tabell 5.20: frekvenstabell over svar på trinn til oppgave 7, prosent i forhold elever på trinnet i parentes.

	8.trinn Frekvens (prosent)	10.trinn Frekvens (prosent)
A	13 (4,5)	8 (4,1)
B	125 (43,4)	95 (48,5)
C	137 (47,6)	82 (41,8)
Svar mangler/ugyldig svar	13 (4,5)	11 (5,6)
Sum	288 (100)	196 (100)

Av de ulike svarkategoriene til elevenes forklaringer på C, er det 'mener det ser tilfeldig ut/ikke mønster' som synker mest fra 8.trinn til 10.trinn. Av de 64 elevene som svarte dette er bare 16 fra 10.trinn.

5.8 Oppgave 8

Figur 5.15: Oppgave 8.

Marthe slår kron og mynt fire ganger. Hun får 3 mynt og 1 kron.
Kristoffer slår også kron og mynt, men holder på lenger. Han slår 40 ganger, og får resultatet 30 mynt og 10 kron.

Du skal nå avgjøre hvilke av disse to eksemplene som er mest sannsynlig.

☐ Det er mest sannsynlig at Marthe får 3 mynt på 4 kast.

☐ Det er mest sannsynlig at Kristoffer får 30 mynt på 40 kast.

☐ Begge eksemplene er like sannsynlig.

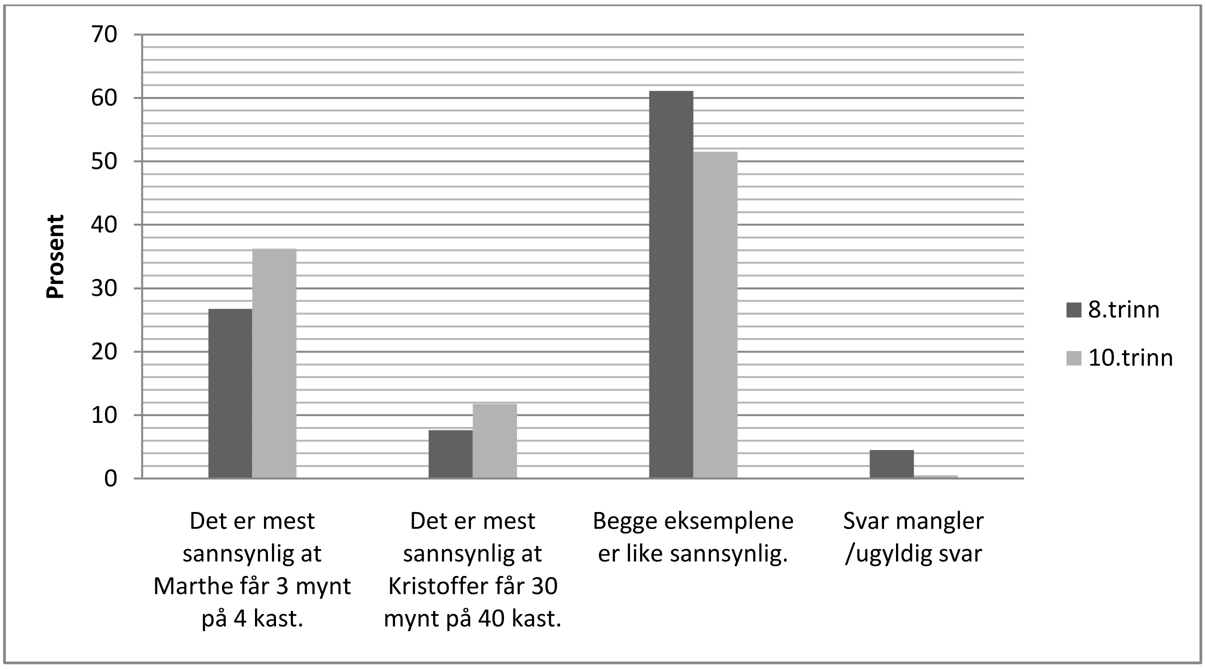
Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 8 er laget for å kontrollere om elevene har forstått loven om store tall. De fleste elever vil ha en intuitiv forståelse av at sannsynligheten for å få mynt eller kron med et kronestykke er likt. Dersom de ikke har lært loven om store tall, kan de da bruke en misoppfatning av typen heuristisk representativitet for å komme til konklusjonen at sannsynligheten er lik i tilfeller der det ikke er det. Under kategorien 'svar mangler/ugyldig svar' er det 11 elever som har valgt ikke å svare på oppgaven. Resultatet av undersøkelsen til oppgave 8 står i tabell 5.21 og diagram 5.16.

Tabell 5.21: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 8.

	Frekvens	Prosent
Det er mest sannsynlig at Marthe får 3 mynt på 4 kast.	148	30,6
Det er mest sannsynlig at Kristoffer får 30 mynt på 40 kast.	45	9,3
Begge eksemplene er like sannsynlig.	277	57,2
Svar mangler/ugyldig svar	14	2,9
Sum totalt	484	100

Figur 5.16: Diagram over svar til oppgave 8, med fordeling på trinn.



5.7.1 Forklaringer til ”Det er mest sannsynlig at Marthe får 3 mynt på 4 kast”

Bare 12 elever av de 148 elevene som valgte dette svaralternativet skrev ned en fullgod forklaring til loven om store tall av typen som elev #370 (gutt, 10.trinn) gjorde: ”Hvis du kaster en terning 100 ganger eller kanskje 100.000. så vil tallene jevne seg ut. Det samme prinsippet her.” 5 av elevene kommer fra 8.trinn og 7 av elevene kommer fra 10.trinn.

Tabell 5.22: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 1 til oppgave 8.

	Frekvens	Prosent
Riktig forklaring, med forståelse av loven om store tall	12	2,5
Riktig forklaring, men noe mangelfull	58	12,0
Andre svar	11	2,3
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	67	13,8

De fleste av de 58 elevene som havner under kategorien ’riktig forklaring, men noe mangelfull’ har forklart valget sitt med at det er fordi det er få kast på dette svaralternativet, eller ulike varianter av at 30 mynt på 40 kast er usannsynlig. For eksempel:

- Elev #393 (jente, 10.trinn): ”Fordi det bare er 4 kast og ikke 40 kast…”
- Eller elev #19 (gutt, 8.trinn): ”Det er ikke sannsynlig og få det så mange ganger på rad.”

Selv om de ikke har forklart eller nevnt loven om store tall eksplisitt, så viser de en forståelse av den som kan være bevisst eller intuitiv. En litt større andel av elevene på 10.trinn enn 8.trinn svarer riktig her.

En type misoppfatning jeg hadde forventet her, er forklaringsmodeller der eleven bruker egen erfaring. Nokså uventet var det bare en elev som brukte det i forklaringen sin: elev #108 (jente, 8.trinn): ”For det fikk Ellen en gang ho gjorde det”

5.7.2 Forklaringer til ”Det er mest sannsynlig at Kristoffer får 30 mynt på 40 kast”

Litt over halvparten av elevene som svarte her gav ingen forklaring, svarte *vet ikke* eller gav svar av typen *ser slik ut*. Med unntak av tre elever, som gav forklaringer de var alene om, så har alle de elevene som skrev en forklaring, gitt forklaringen at det er størst sannsynlighet for det andre alternativet fordi det er flere kast. Den misoppfatningen som kommer til syne her, er at sannsynligheten øker jo flere ganger noe skjer. En mulig årsak til at en slik misoppfatning oppstår, kan være at når man planlegger et forsøk med flere hendelser, så øker sannsynligheten for å få et gitt utfall med antall hendelser. For eksempel så er sannsynlighet for å få en sekser på en terning større når du planlegger å kaste to ganger, enn om du planlegger å kaste en gang. En elev som kan ha tenkt slik, er elev #186 (jente, 8.trinn): ”flere kast blir jo flere sjanser” En litt større andel av 10.trinnselevene har krysset av for dette svaralternativet.

5.7.3 Forklaringer til ”Begge eksemplene er like sannsynlig”

Det er to hovedkategorier av forklaringer som elevene har svart til dette svaralternativet. Det er de som har regnet ut forholdet mellom mynt og kron i de to tilfellene, for så å ha sett at det er det samme, og det er de som direkte har sett at forholdet mellom mynt og kron i de to tilfellene er det samme. Enten husker ikke disse elevene loven om store tall, eller de ser bort fra den i denne sammenhengen. En misoppfatning de kan bruke, er at de setter likhetstegn mellom forholdet de finner og sannsynligheten, og dermed ender opp med lik sannsynlighet. En annen mulighet er at de bruker den loven om sannsynlighet de har lært, at sannsynlighet er lik antall ønskede utfall delt på antall mulige utfall, i tilfeller hvor den ikke kan brukes direkte.

En noe større andel av 8.trinnselevene enn 10.trinnselevene har svart dette svaralternativet. Andelen av 10.trinnselevene som har krysset av her er 9,6 % lavere enn for 8.trinn. Det er liten forskjell på trinnene mellom de elevene som har regnet sannsynligheten i begge tilfellene, eller som sier at de har regnet sannsynligheten. Det er en forskjell på svarkategorien *har observert at det er det samme forhold mellom mynt og kron i begge tilfellene*. 88 8.trinnselever har svart dette, mens det bare er 28 10.trinnselever som har gjort det samme.

Tabell 5.23: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 3 til oppgave 8.

	Frekvens	Prosent
Har observert at det er det samme forhold mellom mynt og kron i begge tilfellene	110	22,7
Har regnet ut forhold mellom mynt og kron i begge tilfellene	51	10,5
Andre svar	7	1,4
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	109	22,5

5.7.4 Fasit til oppgaven

Å regne ut sannsynligheten for å trekke 3 mynt på 4 kast er noe en dyktig ungdomsskoleelev skal være i stand til. De kan finne ønskede utfall og mulige utfall ved hjelp av et trediagram, og sett at det er 4 ønskede utfall (mmmk, mmkm, mkmm, kmmm) av 16 mulige utfall, for deretter sette dette inn i formelen for klassisk betinget sannsynlighet.

$$P(3\ mynt\ \text{på}\ 4\ kast) = \frac{Ønskede\ utfall}{Mulige\ utfall} = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

Derimot å regne ut sannsynligheten av 30 mynt på 40 kast dekkes ikke av pensum på grunnskolen. Problemet her blir å finne utfallene da det blir altfor mange til et trediagram. Man kan bruke en formel for kombinatorikk, der K er antall kombinasjoner, n er antall kast og r er antall mynt, for å finne hvor mange kombinasjoner av kast som gir 30 mynt.

$$ {}_nK_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

Om du setter inn tallene 40 og 30 i denne formelen får du at det er 847660528 kombinasjoner av 30 mynt på 40 kast. 2^{40} = 1099511627776 er antall mulige kombinasjoner av 40 kast. Dersom du setter disse tallene inn i formelen for klassisk sannsynlighet får du at P(30 mynt på 40 kast) = 0,00077, eller knappe 0,08 %.

Siden det ovenstående er komplisert for ungdomsskoleelever, blir den eneste måten elevene kan løse denne oppgaven på, å bruke loven om store tall. Dersom de prøver å bruke begrepet forhold, eller forsøker å regne ut sannsynligheten i hvert tilfelle, tyr de til misoppfatninger hvor de bruker eksisterende kunnskap på felter den ikke var beregnet på.

5.8 Oppgave 9 og 10

Figur 5.17: Oppgave 9.

Det er en kortstokk med 52 kort på bordet foran deg. Det er 13 kort av hver type – hjerter, spar, kløver og ruter. Du trekker ett kort med hjerter, og legger det ikke tilbake i stokken. Hva er sannsynligheten for å trekke ett kort med hjerter fra kortstokken nå?

Kryss av ved det alternativet du mener er riktig:

☐ $\frac{13}{52}$

☐ $\frac{12}{52}$

☐ $\frac{12}{51}$

☐ $\frac{13}{51}$

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Formålet med oppgave 9 var å kontrollere i hvilken grad elevene forstår hvordan sannsynligheten forandres når du har en trekning uten tilbakelegging. Siden det samtidig er en mindre hjerter og ett mindre kort, er *12/51* det riktige svaralternativet. For at oppgaven skal gi mening, må elevene som løser oppgaven ha litt forståelse for regning med klassisk sannsynlighet. Den inneholder ikke vanskelig sannsynlighetsregning, men i motsetning til en del av de andre oppgavene i oppgavesettet, så holder det ikke med en intuitiv forståelse av sannsynlighet. Oppgaven hadde flere svaralternativer før piloteringen, og forskjellen på svaralternativene var større. Da valgte en del elever riktig svar fordi de andre svarene åpenbart ikke kunne stemme, og de andre svarene avslørte lite annet enn at en del elever gjetter. Derfor valgte jeg i den endelige oppgaven bare å ha med svaralternativer som dreier seg om å fjerne ett kort eller ikke fjerne ett kort. Samtidig fungerer oppgave 9 som en kontrolloppgave til oppgave 10. Oppgave 10 ble lagd for å kontrollere misoppfatningen som gjerne blir kalt *Falkfenomenet*, ”the Falk phenomenon”, hvor en del elever skal ha problemer med å se at noe som skjer senere kan ha innvirkning på sannsynligheten til en tidligere trekning. I oppgave 10 er alle svaralternativene lik alternativene i oppgave 9, og oppgaven er lik, med ett unntak. Eleven blir spurt om sannsynligheten på første trekning når man vet hva man får på andre trekning. Riktig svar blir *12/51* her også.

Figur 5.18: Oppgave 10

Som i oppgave 9 har du en kortstokk med 52 kort på bordet foran deg. Du trekker ett kort og legger det til side uten å se på det. Du trekker så ett kort til. Hva er sannsynligheten for at det første kortet er kløver, hvis du vet at det andre kortet er kløver?
Kryss av ved det alternativet du mener er riktig:

□ $\frac{13}{52}$

□ $\frac{12}{52}$

□ $\frac{12}{51}$

□ $\frac{13}{51}$

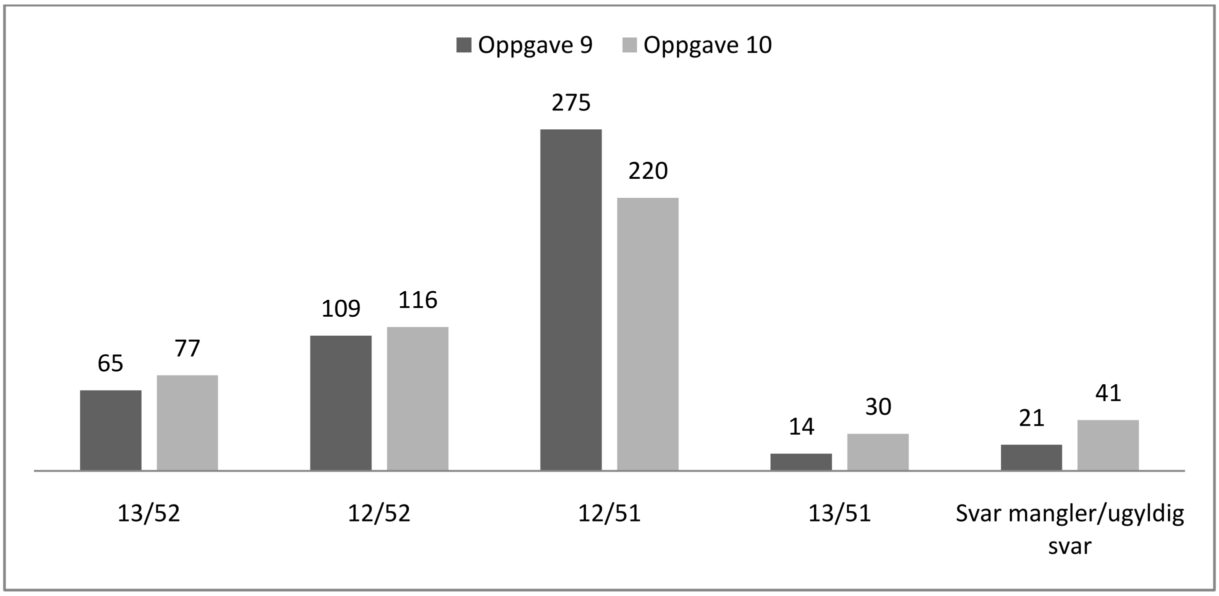
Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Resultatet på begge oppgavene er satt inn i tabell 5.24 og diagrammet i figur 5.18.

Tabell 5.24: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 9 og 10.

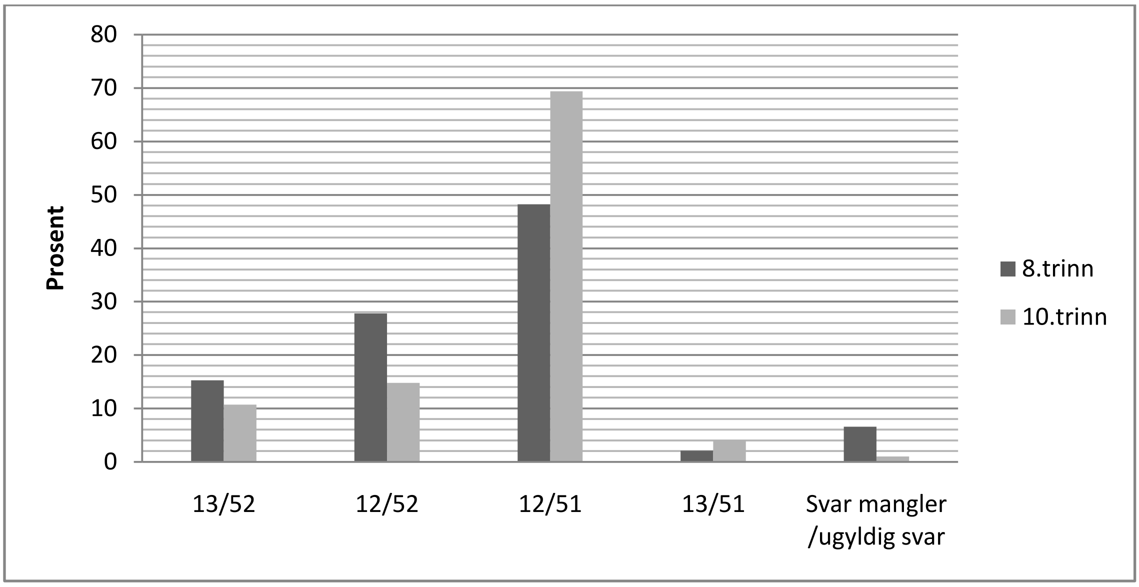
	Oppgave 9		Oppgave 10	
	Frekvens	Prosent	Frekvens	Prosent
$\frac{13}{52}$	65	13,4	77	15,9
$\frac{12}{52}$	109	22,5	116	24,0
$\frac{12}{51}$	275	56,8	220	45,5
$\frac{13}{51}$	14	2,9	30	6,2
Svar mangler/ugyldig svar	21	4,3	41	8,5
Sum totalt	484	100	484	100

Figur 5.19: diagram over svarene i oppgave 9 og 10, sifrene øverst på søylene viser antall svar.



5.8.1 Kommentarer til oppgave 9

Figur 5.20: Diagram over svar til oppgave 9, fordelt på trinn.



Over halvparten av elevene har svart riktig på denne oppgaven, og andelen av elevene som valgte å komme med en forklaring på hvorfor de valgte som de gjorde, er mye større på det riktige svaralternativet enn på de andre tre svaralternativene. Dette kan tyde på at de som har valgt andre svaralternativer er litt ukomfortable med valget sitt, i og med at de i større grad ikke begrunner svaret sitt.

10.trinnselevene gjør det bedre enn 8.trinnselevene på denne oppgaven. Andelen elever på 10.trinn som svarer riktig er 21,1 % høyere enn andelen elever på 8.trinn som svarer riktig. Bevegelsen etter alder er størst på disse to svarkategorier (med antall elever på de to trinnene som har svart slik i parentes):

- *Skriver at det er full stokk, 52 kort og/eller 13 hjerter* (20 elever på 8.trinn, 6 elever på 10.trinn)
- *Skriver at det er en mindre hjerter, eller 12 hjerter* (33 elever på 8.trinn, 3 elever på 10.trinn)

Misoppfatninger til disse to svaralternativene ser ut til å forsvinne gradvis med alder og undervisning.

Under det riktige alternativet har 67 elever begrunnet valget sitt med at et kort er fjernet, uten å si at du da har 12 hjerter og 51 kort igjen. Det samme argumentet blir brukt på svaralternativene som er feil også, 11 elever har svart det samme til svaralternativet 12/52, og 3 elever til svaralternativet 13/51. På svaralternativet 12/52 har dessuten 36 elever gitt forklaringen at de har krysset av her fordi det da er 12 hjerter, eller en mindre hjerter. Eksempler på dette er:

- Elev #209 (jente, 8.trinn): svarte 12/52 – ”fordi det er tolv kort igjen av de 52”
- Elev #212 (gutt, 8.trinn): svarte 12/52 – ”Det er 13 hjerter, du tar ett. ren logikk!”
- Elev #336 (gutt, 10.trinn): svarte 12/52 – ”Det var 13 kort, trakk ett, da er det 12.”

Disse elevene har forstått at det at å fjerne et kort har innvirkning på sannsynligheten, men har ikke fått med seg at det virker inn både på antall gunstige utfall og mulige utfall. Misoppfatningen her bunner ut i at elevene har forstått premissen for oppgaven, men ikke fullt ut forstått hva det innebærer matematisk. De har forstått at de skal ta vekk et kort, og er fornøyd når de har tatt vekk et kort en gang. Flere svaralternativer kan da virke riktige, selv om det at det er en mindre hjerter virker lettere å få med seg, enn at det er et mindre kort i stokken. Langt flere 8.trinnselever gjør denne feilen enn 10.trinnselever.

Under svaralternativet 13/52 er det elever som ikke har forstått at å ta vekk et kort har noe å si for sannsynligheten når du trekker neste kort. 33 elever skriver ulike svar som går ut på at de tror at det fortsatt er en full stokk. Enten har de ikke forstått at et kort tas vekk, eller så mener de at det ikke har noen betydning at et kort tas vekk, eller så mener de at det er tilbakelegging. Langt flere 8.trinnselever gjør denne feilen enn 10.trinnselever her også. De fleste forklaringene her er av typen:

- Elev #142 (gutt, 8.trinn): ”Det er 13 ♥ og 52 kort”,
- Elev#159 (jente, 8.trinn): ”det er 13 hjerter i en bunke på 52 kort. da er det vel sannsynelig at svaret er 13/52”.

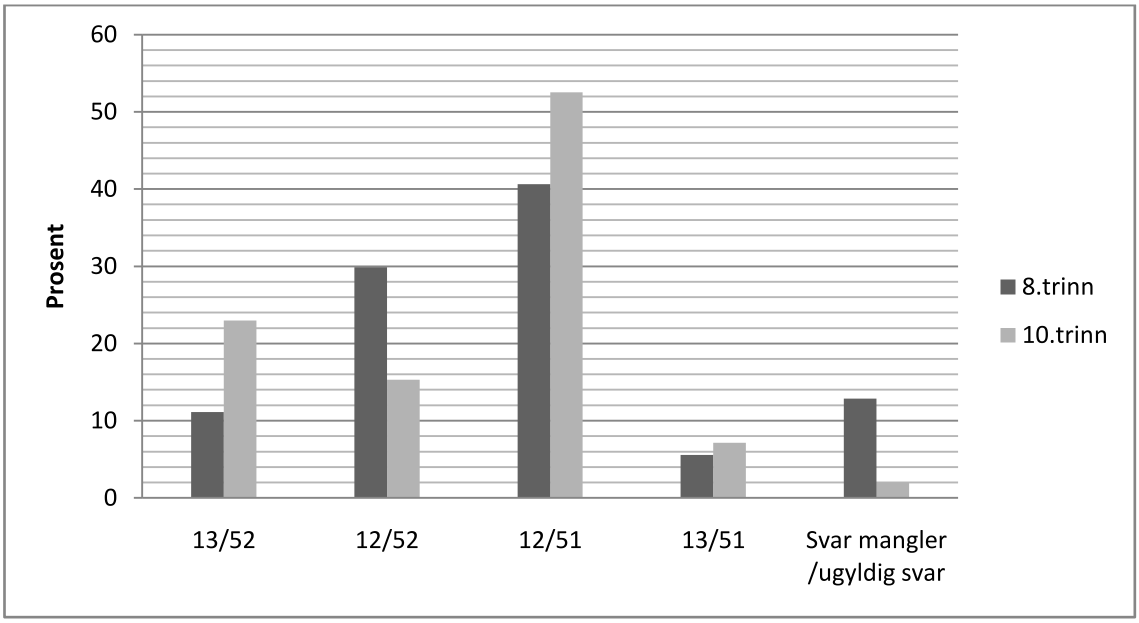
Dette er noe som gjør at det er vanskelig å avgjøre om årsaken til at de svarer slik, er at de har forstått oppgaven feil, eller om det er en misoppfatning. Dersom de mener at det første kortet som trekkes ut er uvesentlig for sannsynligheten ved andre trekning, har de en misoppfatning.

Tabell 5.25: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svarkategoriene til oppgave 9.

		Frekvens	Prosent
$\frac{13}{52}$	Skriver at det er full stokk, 52 kort og/eller 13 hjerter	26	5,4
	Tror det er tilbakelegging	7	1,4
	Andre svar	1	0,2
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	31	6,4
$\frac{12}{52}$	Skriver at det er en mindre hjerter, eller 12 hjerter	36	7,4
	Skriver at et kort er fjernet	11	2,3
	Andre svar	6	1,2
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	56	11,6
$\frac{12}{51}$	Skriver at et kort er fjernet	67	13,8
	Skriver at du har 12 hjerter og 51 kort igjen	135	27,9
	Andre svar	5	1,0
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	68	14,0
$\frac{13}{51}$	Skriver at et kort er fjernet	3	0,6
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	11	2,3

5.8.2 Kommentarer til oppgave 10

Figur 5.21: Diagram over svar til oppgave 10, fordelt på trinn.



De viktigste kategorier av forklaringer er satt inn i tabell 5.26.

De fleste misoppfatningene og forklaringsmodellene som er nevnt til oppgave 9, er representert i svarene til oppgave 10. Dette gjelder også fordelingen mellom 8.trinn og 10.trinn. Unntaket er svarkategorien til det første svaralternativet 13/52, som går ut på at eleven tror det er tilbakelegging, og av den grunn mener du skal bruke full kortstokk i sannsynlighetsberegningen. Faktisk er det nesten ingen elever i oppgave 10 som mener at du skal gå ut fra full kortstokk, selv om det var 26 elever som skrev det på oppgave 9. Om du legger sammen kategoriene 'skriver at det er full stokk, 52 kort og/eller 13 hjerter' og 'tror det er tilbakelegging', så har antallet elever som har svart dette, blitt redusert fra 33 i oppgave 9 til 4 i oppgave 10, om man regner med de elevene som sier at de svarte det samme som i oppgave 9. Når man går inn på svarene til de 33 elevene i oppgave 9 for å se hva de svarte i oppgave 10, ser man ikke noe mønster. Forklaringene de da kommer med, fordeler seg utover 16 ulike koder til de tre første svaralternativene. Det er vanskelig å se at den lille endringen i oppgaveteksten skal ha trigget dette. Det er mulig at elevene som svarte dette i oppgave 9, har vært såpass ukomfortable med svarene sine at de har lett etter andre alternativer når en lignende oppgave gir dem en mulighet til.

Tabell 5.26: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svarkategoriene til oppgave 10.

		Frekvens	Prosent
$\frac{13}{52}$	Forklaringer som går ut på at den andre trekningen ikke har noen innvirkning på den første	26	5,4
	Sier de har svart det samme som i oppgave 9	3	0,6
	Andre svar	6	1,2
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	42	8,7
$\frac{12}{52}$	Skriver at det er en mindre kløver, eller 12 kløver	35	7,2
	Sier de har svart det samme som i oppgave 9	4	0,8
	Andre svar	9	1,9
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	68	14,0
$\frac{12}{51}$	Skriver at et kort er fjernet	25	5,2
	Skriver at du har 12 hjerter og 51 kort igjen	51	10,5
	Sier de har svart det samme som i oppgave 9	50	10,3
	Andre svar	8	1,7
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	86	17,8
$\frac{13}{51}$	Andre svar	9	1,9
	Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	21	4,3

En viktig forskjell mellom oppgavene 9 og 10 er de 26 elevene på svaralternativet 13/52, som kom med forklaringer som går ut på at den andre trekningen ikke har noen innvirkning på noe som allerede har skjedd. Dette viser at misoppfatningen *Falkfenomenet*, problemet med å se at en senere hendelse kan påvirke sannsynligheten, er tilstede blant disse elevene, om enn ikke i veldig stor grad. To forklaringer som viser dette er:

- Elev#452 (gutt, 10.trinn): ”Fordi det er 13 kløver og 52 kort i bunken når du trekker kortet.”
- Elev#457 (gutt, 10.trinn): ”for i starten er det 52 kort og 13 kløver.”

En annen viktig observasjon her er at de fleste som har brukt denne misoppfatningen er elever på 10.trinn. Av de 26 elevene som svarte dette er 20 elever fra 10.trinn og bare 6 er 8.trinnselever. Det kan synes som om dette er en misoppfatning som ikke bare er vanskelig å rette opp, men som også kan øke med alder og undervisning.

Antallet elever som valgte å svare blankt doblet seg fra oppgave 9 til oppgave 10, fra 18 til 36 elever. På oppgave 10 er de fleste av elevene som valgte å svare blankt fra 8.trinn. Samtidig er det godt over halvparten av elevene som har fått rett på oppgave 9, mens godt under halvparten har fått rett på oppgave 10. Nedgangen er fra 56,8 % til 45,5 %. Det kan være mange årsaker til disse forholdene:

- En del elever kan synes at oppgave 10 var vanskeligere enn oppgave 9.
- De kan ha blitt forvirret av at to så like oppgaver stod etter hverandre.
- Elevene kan ha blitt mer og mer lei mot slutten av oppgaven.
- Oppgave 10 kan være reelt vanskeligere enn oppgave 9.
- Det kan være flere potensielle misoppfatninger i oppgave 10.

5.9 Oppgave 11

Figur 5.21: Oppgave 11.

En lærer slår kron og mynt med to kronestykker uten at du ser resultatet. Læreren innrømmer at det ble minst en kron.
Hva er sannsynligheten for at det ble kron på det andre kronestykket også?

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{2}{3}$

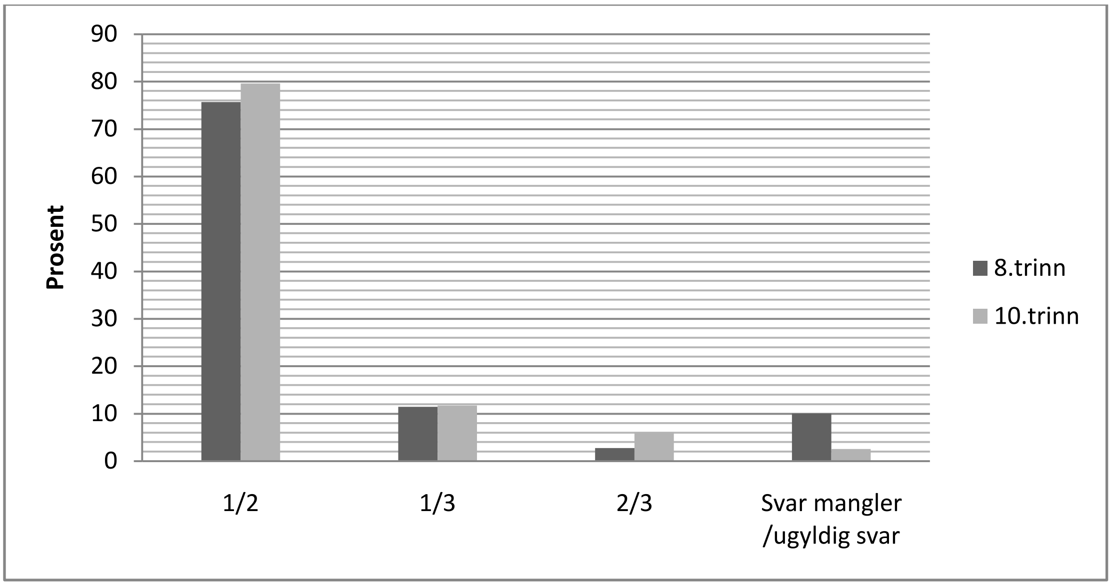
Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Dette er den siste oppgaven i oppgavesettet, og andelen av elever som velger ikke å svare på oppgaven har økt en del utover i oppgavesettet. Det kan være to trolige årsaker til det: enten fordi oppgavene har blitt vanskeligere utover i oppgavesettet, eller fordi innsatsen går ned når elevene går lei. Hensikten med denne oppgaven var å se om elevene hadde en overfladisk forståelse av utfallsrommet.

Tabell 5.27: frekvenstabell og prosentvis fordeling av svar til oppgave 11.

	Frekvens	Prosent
$\frac{1}{2}$	374	77,3
$\frac{1}{3}$	56	11,6
$\frac{2}{3}$	20	4,1
Ingen svar/ugyldig svar	34	7,0
Sum totalt	484	100.0

Figur 5.22: Diagram over svar til oppgave 11.



Når man slår kron og mynt med to kronestykker, rommer i utgangspunktet utfallsrommet fire muligheter – mynt/mynt, kron/kron, kron/mynt, mynt/kron. Men mynt/mynt er ikke mulig siden vi vet at en av myntene ble kron. I denne oppgaven er derfor utfallsrommet U={kron/kron, kron/mynt, mynt/kron}, med andre ord blir antall mulige utfall=3. Sannsynligheten for at det blir kron på det andre kronestykket blir derfor P(kron)=1/3.

5.9.1 Forklaringer til "1/2"

Et overveldende flertall på 77,3 % av elevene valgte dette alternativet, noe som betyr at oppgaven åpenbart er vanskeligere for elever på disse årstrinnene enn nivået på den nødvendige regningen skulle tilsi. Andelen elever på 10.trinn som valgte å krysse av på dette svaralternativet er litt større enn andelen 8.trinnselever som valgte å krysse av her. Det er bare svarkategorien 'ingen forklaring' hvor 10.trinnselevene er klart overrepresentert. De fordeler seg utover de andre svarkategoriene noenlunde likt som svarene fra 8.trinn. Elevene på 10.trinn har rett før denne testen gjennomgått trediagram og regning med klassisk sannsynlighet, noe som ikke kommer til uttrykk på akkurat denne oppgaven. Det bør ligge til grunn noen misoppfatninger som årsak til dette. De ulike kategorier av forklaringer er satt inn i tabellen under.

Tabell 5.28: frekvenstabell og prosentvis fordeling på svaralternativ 1 til oppgave 11.

	Frekvens	Prosent
Forklaringer som går ut på at det er lik sannsynlighet når du slår kron og mynt	163	33,7
Sannsynligheten nullstilles for hver trekning	14	2,9
Det er to kronestykker (en av to)	44	9,1
Andre svar	16	3.3
Ingen forklaring/ser slik ut/vet ikke	137	28,3

Under kategorien 'forklaringer som går ut på at det er lik sannsynlighet når du slår kron eller mynt', er det samlet alle svar som går ut på to muligheter med kron og mynt, hvor de skriver ting som 50 %, 50-50, ½, lik sannsynlighet. Felles for disse forklaringene er at de viser en overfladisk forståelse av antall mulige utfall. De kan ha en misoppfatning der de har forstått at muligheten mynt/mynt er blitt uaktuelt, og at de bare sitter igjen med de to mulighetene mynt/kron og kron/kron. De har da oversett utfallet kron/mynt i utfallsrommet. En elev som kan ha tenkt slik er elev #422 (gutt, 10.trinn): "fordi det er 1 ønsket hendelse og 2 mulige hendelser"

En andel av elevene har nok en misoppfatning som er knyttet til tidligere erfaring med kron og mynt, eller med oppgaver med kronestykker. Fordi det virker innlysende på dem, lar de være å undersøke utfallsrommet, selv om en god del av dem ville vært i stand til å finne utfallsrommet om de ble utfordret på nettopp dette.

Et ganske stort antall, hele 44 elever, har hektet seg opp i de to ordene i oppgaven: 'to kronestykker'. Her ligger nok til grunn den samme misoppfatningen som nevnt over, men paret med litt rask lesing av oppgaven.

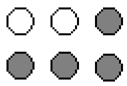
En litt annen misoppfatning kan være årsak til at noen elever begrunnet svaret med at sannsynligheten nullstilles for hver trekning. En ting det terpes mye på i grunnskolen innen sannsynlighet er at en trekning ikke har innvirkning på neste trekning, noe som bare er riktig til et visst punkt. Hvis man er i tvil, hvorfor ikke ta sjansen på noe læreren har gjentatt om og om igjen?

5.9.2 Forklaringer til ”1/3”

Av de 56 elevene som krysset av for dette alternativet, har bare 6 elever begrunnet svaret sitt. Det er derfor vanskelig å vite hvor mange av dem som har krysset av her som har gjettet. Kun to elever har kommet med forklaringer som kan sies å være riktige, eller som viser at de har tenkt riktig; en fra 8.trinn og en fra 10.trinn:

Elev #129 (gutt, 8.trinn): ”fordi man har 3 muligheter”

Elev #474 (jente, 10.trinn): ”Det er vanskelig å forklare. Så jeg prøvde å illustrere. Siden det var slik jeg tenkte.



= 1/3 ”

Det er bare å konkludere med at svært få klarte denne oppgaven, noe som hadde vært et problem dersom oppgavesettet var skapt til å rangere elever, eller for å kontrollere måloppnåelse. Det at så mange elever svarer feil på en diagnostisk oppgave, bare understreker at misoppfatningene er der.

5.9.3 Forklaringer til ”2/3”

Dette svaralternativet ble lagt til for at det skulle være tre alternativer. Det innholder noen av de samme sifrene som i de to andre alternativene for ikke å skille seg for mye ut. Jeg så på dette svaralternativet som et kontrollalternativ, for å se hvor mange som gjetter. Av de 20 elevene som krysset av her, har fire begrunnet svarene sine med slikt som: at det er fordi det er to igjen, at det er vanligere med kron så…, eller at det er lite sannsynlig med kron igjen.

5.10 Item-analyse av oppgavesettet

Resultatene for svaralternativene til oppgavene er vist oppgave for oppgave i tabellene under. Svaralternativene er kalt A, B, C, D i den rekkefølgen de fremstår i oppgavene. Noen oppgaver har to svaralternativer, mens andre har tre eller fire. Oppgave 6 skiller seg ut mange svaralternativer, så den står i egen tabell. Under *svarfordeling i prosent* er det oppført hvor mange prosent som har valgt hvert enkelt svaralternativ, mens det riktige svaralternativet er skyggelagt. For eksempel på oppgave 1 har 61,4 % av elevene i undersøkelsen valgt det riktige svaralternativet, som er svaralternativ B. Under *dyktighet* er det oppført gjennomsnittpoengsummen til de som har valgt dette svaralternativet. For eksempel på oppgave 1 har de som valgte det riktige svaralternativet fått 5,7 poeng i gjennomsnitt. K er Pearsons korrelasjonskoeffisient mellom riktig svar på den enkelte oppgave og poengsum på hele undersøkelsen. Med andre ord i hvor stor grad de som har svart riktig på oppgaven også har fått høy poengsum på hele undersøkelsen. Pearsons korrelasjonskoeffisient er beskrevet i kapittel 4.7.3 (side 52-53).

Tabell 5.29: Item- analyse for testen i sannsynlighet, unntatt oppgave 6. Svarfordelingen og dyktigheten (poeng oppnådd på testen for de som har svart slik) er avrundet til en desimal etter komma. Riktig svar er skyggelagt. K er korrelasjonskoeffisienten mellom resultatet på hver enkelt oppgave og samlet poengsum.

Oppg.	Svarfordeling i prosent						Dyktighet						K
	A	B	C	D	*)	**)	A	B	C	D	*)	**)	
O1	14,0	61,4	24,6		0,0	0,0	4,2	5,7	4,3		-	-	0,392
O2	6,0	91,7			0,4	1,9	3,5	5,3			1,5	6,9	0,161
O3	44,2	12,6	33,9	7,4	0,8	1,0	4,5	4,9	6,4	4,5	2,3	5,0	0,473
O4	55,6	43,0			0,8	0,6	4,5	6,1			2,8	6,3	0,413
O5	20,5	9,3	69,8		0,2	0,2	3,8	3,9	5,7		2,0	6,0	0,469
O7	4,3	45,5	45,2		3,3	1,7	4,3	4,8	5,7		3,5	5,9	0,277
O8	30,6	9,3	57,2		2,7	0,2	5,8	4,1	5,0		3,8	5,0	0,241
O9	13,4	22,5	56,8	2,9	4,3	0,0	4,0	4,0	6,1	3,3	3,5	-	0,602
O10	15,9	24,0	45,5	6,2	8,3	0,0	5,0	4,1	6,2	4,1	3,9	-	0,498
O11	77,1	11,6	4,1		7,2	0,0	5,4	5,1	4,1		3,5	-	-0,120

*) Elever som ikke har besvart oppgaven, eller gitt et tullesvar. **) Elever som krysset av for flere alternativer

Tabell 5.30: Item- analyse for testen i sannsynlighet for oppgave 6. Svarfordelingen og dyktigheten (poeng oppnådd på testen for de som har svart slik) er avrundet til en desimal etter komma. Riktig svar er skyggelagt. K er korrelasjonskoeffisienten mellom resultatet på hver enkelt oppgave og samlet poengsum.

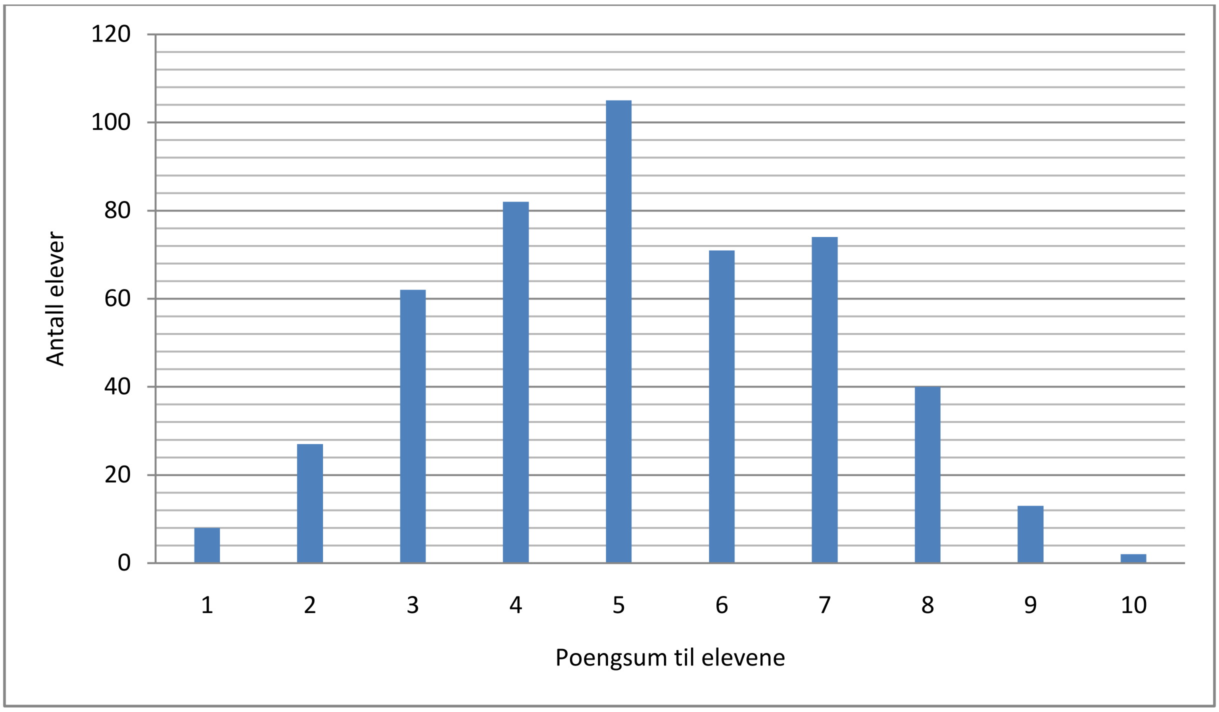
Oppg. nr 6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*)	**)
Svarfordeling i prosent:	0,8	0,6	0,8	1,9	2,9	2,5	23,1	27,5	7,2	1,9	2,3	0,8	6	8,9	12,6
Dyktighet	3,8	4	5,5	4,3	4,1	4,3	4,6	6,5	5,2	4,4	5	3	4,6	3,9	5,6

*) Elever som ikke har besvart oppgaven, eller gitt et tullesvar. **) Elever som krysset av for flere alternativer. K = 0,423

Svarprosenten i undersøkelsen er god, på de fem første oppgavene er det under 1 % som leverer blankt. Det er en tendens til at andelen blanke svar øker mot slutten av undersøkelsen. Tidsnød skal ikke være en faktor, siden elevene skal ha fått den tiden de trenger. Mest sannsynlig er det en kombinasjon av to faktorer som er årsak til økningen av blanke svar utover i oppgaven. Den ene faktoren er tendensen til at elever går lei utover i oppgavesettet, dette til tross for at oppgavesettet er ganske kort i forhold til mange standardiserte tester elevene ellers gjennomfører. I piloteringen brukte de fleste elevene rundt tjue minutter på å gjennomføre testen. Den andre faktoren er at det også er en tendens til at vanskegraden øker utover i testen. Ett unntak fra tendensen om at andelen blanke svar øker utover i oppgaven, er svarene til oppgave 6, der det var 8,9 % som svarte blankt, noe som er den største andelen i oppgavesettet. Dette skyldes nok at denne oppgaven skiller seg fra resten av oppgavene ved at elevene ikke kunne krysse av et svar, men måtte aktivt velge ett tall til svaret sitt. På mange av oppgavene er det svært få elever som har valgt å svare blankt. Jevnt over er det elever som har lav poengsum som svarer blankt på oppgavene. Også på de oppgavene der andelen blanke svar var størst, noe som gjelder for oppgave 6 til 11, ligger gjennomsnittspoengsummene fra 3,5 til 3,9 på den enkelte oppgaven. Gjennomsnittet på hele undersøkelsen var 5,17. Det motsatte, at de dyktigste elevene er de som svarer riktig, gjelder ikke alle oppgavene. Dette er noe jeg kommer tilbake til mot slutten av kapitlet.

Fra oppgave 2 til oppgave 8 er det til sammen 27 svar der eleven krysser av for flere alternativer. Gjennomsnittet av poengsummen på disse elevene på den enkelte oppgave ligger ganske høyt, fra 5,0 til 6,9. Det er med andre ord ikke de svakeste elevene som har selvtillit nok til å krysse av flere, og dermed si at de mener det er noe feil med oppgaven. Det kan være verdt å merke seg at rundt halvparten av disse svarene hvor elever har krysset av for flere svaralternativer samtidig, kommer fra den samme skolen og den samme klassen. Disse resultatene kan derfor like godt være et uttrykk for den undervisningen den klassen har fått, eller avvikende veiledning i gjennomføringen av undersøkelsen.

Figur 5.23: Diagram over hvor mange elever som har fått hvilken poengsum. Gjennomsnittspoengsummen = 5,17 og standardavviket = 1,86.



Poengsummene til elevene fordeler seg, ut i en tilnærmet klokkeformet kurve (figur 5.21). Kurven er nesten symmetrisk, hverken positiv eller negativt skjev, siden det var mulig å få både 0 poeng og 11 poeng totalt på oppgaven. Den gjennomsnittlige svarprosenten på de riktige svarene var 44,5 %. Spørsmålet er om den lave riktige svarprosenten kan tyde på at vanskelighetsgraden på oppgavesettet har vært noe høy. I rapporten til de nasjonale prøvene 2004 ble det uttrykt et ønske om at den gjennomsnittlige andelen med riktige svar burde vært rundt 60 %, for blant annet å øke motivasjonen til å gi flere svar (Lie, Caspersen, 2004). Et argument mot at vanskelighetsgraden har vært for høy, er at formålet med denne testen er en annen enn de nasjonale prøvene. Her er hensikten ikke rangering og kontroll av måloppnåelse, men å avsløre misoppfatninger. Det er her ikke nødvendigvis noe negativt ved å svare feil, da det bare gir en mulighet til å rette opp ulike misoppfatninger, gjennom tiltak som for eksempel diagnostisk undervisning. Dette gjør at det ikke nødvendigvis er noe galt med at det er 5 oppgaver der det riktige svaret ikke er det svaralternativet som har høyest svarprosent (oppgave 3, 4, 7, 8 og 11). Tvert imot har jeg med nettopp disse oppgavene vist hvor det er størst fare for misoppfatninger. Misoppfatningene til disse oppgavene kan også være spesielt ”seiglivete” eller motstandsdyktige mot formell undervisning.

Med ett unntak er den målte dyktigheten til de ulike svaralternativene størst på de riktige svaralternativene. Med andre ord at de flinkeste elevene oftere svarer riktig på oppgavene i testen. Dersom man ser på korrelasjonskoeffisientene, får man det samme resultatet: det er korrelasjon mellom riktig svar på oppgavene og oppnådd poengsum på hele undersøkelsen. Korrelasjonskoeffisientene mellom hver oppgave og samlet poengsum er ikke høy for noen av oppgavene, mens koeffisienten for oppgavene 2, 7 og 8 kan regnes som lav. En korrelasjonskoeffisient på over 0,7 kan regnes som høy, mens en på under 0,3 kan regnes som lav (Lie, Caspersen, 2004). Felles for korrelasjonskoeffisientene til oppgavene 1 til 10 var at signifikansen var mindre enn 0,0005, med andre ord at sannsynligheten for at sammenhengen har oppstått tilfeldig er < 0,0005, eller <0,05 %.

Oppgave 11 er det eneste unntaket fra dette. I denne oppgaven var det også veldig få som svarte riktig, bare 11,6 %, mens hele 77,1 % hadde svart det første alternativet. Samtidig viste korrelasjonskoeffisienten på denne oppgaven at det ikke er sammenheng mellom de som har svart riktig på denne oppgaven og de som har fått høy poengsum. Det er altså ikke en større andel av de flinke elevene som svarer riktig på denne oppgaven. Koeffisienten viser en svak negativ korrelasjon (-0,12), mens signifikansen i dette tilfellet var 0,79, noe som betyr at sannsynligheten for at den negative korrelasjonen har oppstått tilfeldig er 79 %.

Det ville være naturlig å forvente at de som er best på de enkelte oppgavene også er best på undersøkelsen som helhet. Det at det ikke er høy korrelasjon mellom disse to faktorene på noen av oppgavene i undersøkelsen, sier noe om sannsynlighet som emne. Mange problemstillinger kan føles dagligdagse, hvor intuitive svar kan føles naturlig, mens man trenger en formell matematisk forståelse for å kunne svare riktig. På oppgavene 2, 7 og 8 var korrelasjonskoeffisienten under 0,3, og kan dermed regnes som lav, selv om forskjellen er signifikant. Som jeg kommer tilbake til i kapittel 5.12, så skiller oppgave 2 seg ut fra de andre ved at de fleste svarte riktig. Den lave korrelasjonen kommer nok av at veldig få elever svarte feil her. Oppgave 7 og 8 har det til felles at det er lav men signifikant korrelasjon mellom resultat på oppgaven og poengsum totalt. De har også det til felles at det riktige svaralternativet ikke er det svaralternativet som flest elever har svart. Med andre ord er det ikke nødvendigvis de flinkeste elevene som har krysset av riktig på disse oppgavene. Dette kan være et signal om at misoppfatningene i disse oppgavene kan være vanskelige å fjerne, eller at det faglige grunnlaget for å løse disse oppgavene i liten grad har hatt fokus i undervisningen elevene har fått. Det kan også tyde på at det er vanskelig å løse disse oppgavene ut fra intuisjon og dagligdagse erfaringer.

5.11 Forskjeller mellom gutter og jenter

Gjennomsnittspoengsum for alle elevene som deltok i undersøkelsen var 5,17, mens gjennomsnittet for henholdsvis jenter og gutter var på 5,01 og 5,31. Det er altså en forskjell på jenter og gutter, selv om forskjellen er relativt liten, bare 0,30 poeng av 11 mulige poeng. Spørsmålet er om dette betyr at guttene i undersøkelsen virkelig er bedre enn jentene i sannsynlighet. En T-test på variablene kjønn og poengsum viser at signifikansen (2-halet) er 0,07. Noe som skulle tilsi at sannsynligheten for at denne forskjellen i middelverdi skulle ha oppstått tilfeldig er 7 %. Selv med et signifikantnivå på 0,05, så er dette litt for høyt til å kunne si at den registrerte forskjellen er signifikant. Fra SPSS får jeg at standardfeilen til middelverdien (standard error of mean) til jentene og guttene blir henholdsvis 0,115 og 0,122. (Utregning: standardfeilen er lik standardavviket delt på kvadratroten av antallet jenter eller gutter) Det er altså en tydelig forskjell på standardfeilen og forskjellen i gjennomsnitt, men forskjellen er ikke veldig stor. Dette viser det samme som T-testen over. Selv om forskjellen hadde vært signifikant, så er forskjellen på 0,3 poeng ganske liten, slik at det ville være vanskelig å si at forskjellen har noen betydning. Jeg fant heller ikke noen forskjeller av betydning på de enkelte oppgavene.

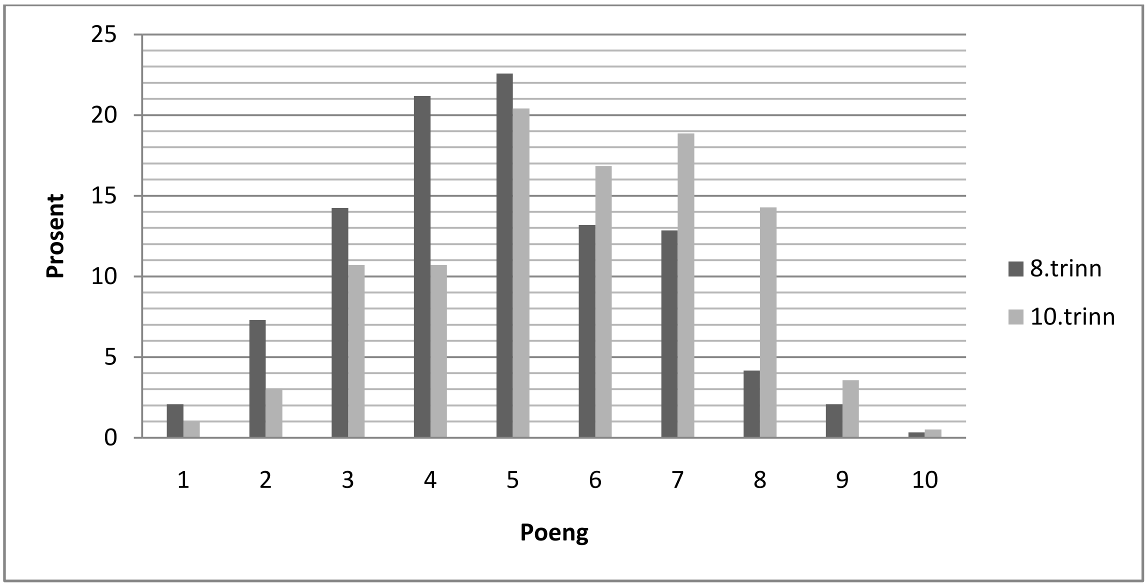
5.12 Forskjeller mellom 8.trinn og 10.trinn

Forskjellene mellom trinnene på de ulike oppgavene er diskutert i tilknytning til hver enkelt oppgave i kapitlene 5.1 til 5.9 (side 54-105). I dette kapitlet ønsker jeg å diskutere holdbarheten i disse forskjellene, i hvilken stor grad forskjellene er signifikante. I tillegg ønsker jeg å understreke de misoppfatningene som ikke viser bedring med alder og formell undervisning.

Gjennomsnittspoengsummen for elevene på 8.trinn var 4,82, mens den var 5,69 på 10.trinn. Selv om forskjellen tilsynelatende ikke er så stor, bare 0,87 poeng, tilsvarer det at 10.trinnselevene har fått i gjennomsnitt 18 % høyere poengsum enn 8.trinnselevene. I en T-test på variablene trinn og poengsum blir signifikansen oppgitt til 0,000, noe som vil si at sannsynligheten for at dette har oppstått tilfeldig er mindre enn 0,0005 eller 0,05 %. Med andre ord er forskjellen mellom trinnene signifikant på et signifikantnivå på 0,01. Som forventet gjør 10.klassingene det bedre i undersøkelsen enn 8.klassingene. Dette kan også vises ved å se på standardfeilen for poengsummen til 8.trinn og 10.trinn. Fra SPSS får jeg at standardfeilen er 0,105 for 8.trinn og 0,132 for 10.trinn. Differansen mellom gjennomsnittet på trinnene på 0,87 poeng er mye større enn standardfeilen, noe som tilsier at det er en signifikant forskjell.

Figur 5.24 er en oversikt som viser prosentvis fordeling av 8.trinns- og 10.trinnselever på de forskjellige poengsummene. Både fordelingen på 8.trinn og fordelingen på 10.trinn har beholdt noenlunde ”klokkeformen” fra figur 5.23. Bare at her er kurven til 8.trinn negativ skjev, mens kurven til 10.trinn er positiv skjev. Det er ingen resultater som avviker sterkt, og som derfor kunne ha påvirket gjennomsnittet. Fordelingen av resultatene i figur 5.24 viser langt på vei at det er en tydelig forskjell på resultatene til 8.trinn og 10.trinn.

Figur 5.24: Diagram over hvor mange elever som har fått hvilken poengsum på hvert trinn.



Tabell 5.31: Oversikt over signifikans og forskjell i gjennomsnitt til hver oppgave. Tatt fra T-test på alle oppgavene gruppert etter trinn. Merk at maks poengsum en elev kan oppnå på en oppgave er 1 poeng, så forskjellen i gjennomsnitt må sees i forhold til dette.

	Forskjell i gjennomsnittene	Signifikans (2-halet)
Oppgave 1	-0,028	0,535
Oppgave 2	-0,007	0,788
Oppgave 3	0,149	0,001
Oppgave 4	0,101	0,028
Oppgave 5	0,130	0,002
Oppgave 6	0,153	0,000
Oppgave 7	-0,057	0,214
Oppgave 8	0,095	0,026
Oppgave 9	0,211	0,000
Oppgave 10	0,122	0,008
Oppgave 11	0,003	0,926

I tabell 5.31 er det satt inn resultatet fra T-tester mellom riktig svar på oppgavene og trinn. Det er bare forskjellen på riktig og feil svar, og om forskjeller mellom trinnene er signifikante, som blir vurdert. Forskjeller mellom de ulike svaralternativene er diskutert til hver oppgave i kapitlene 5.1 til 5.9 (side 54-105). Dersom forskjellen i gjennomsnitt er negativ, betyr det at 8.trinnselevene gjorde det bedre på denne oppgaven enn 10.trinnselevene.

Dersom man ser på hver enkelt oppgave, i tabell 5.31, så ser man at det er 5 oppgaver hvor forskjellen er signifikant ved et signifikansnivå på 0,01. Det at 10.trinnselevene gjør det bedre enn 8.trinnselevene på oppgave 3, 5, 6, 9 og 10 er altså ikke tilfeldig. Dette er kommentert i kapitlene til oppgave 3, 5, 6, 9 og 10, og vises tydelig i diagrammene til hver enkelt oppgave:

- Oppgave 3 (figur 5.8, kapittel 5.3, side 64-69)
- Oppgave 5 (figur 5.10, kapittel 5.4, side 70-74)
- Oppgave 6 (figur 5.12, kapittel 5.5, side 75-79)
- Oppgave 9 (figur 5.19, kapittel 5.8.1, side 92-100)
- Oppgave 10 (figur 5.20, kapittel 5.8.2, side 92-100)

Alle elevene i undersøkelsen har hatt tilstrekkelig innføring i sannsynlighet til å løse disse fem oppgavene. Elevene på 8.trinn har gått gjennom klassisk sannsynlighet en gang, mens elevene på 10.trinn har vært gjennom det minst to ganger, helst flere. Det er rimelig å anta at de misoppfatningene som gjør seg gjeldende i disse fem oppgavene, avtar med alder og formell undervisning. Enten så forsvinner misoppfatningene gjennom naturlig modning hos elevene, eller så forsvinner de gjennom den undervisningen som foregår gjennom ungdomsskolen. Et unntak fra dette er de 26 elevene som brukte misoppfatningen *Falkfenomenet* i oppgave 10. Flesteparten på 20 elever, som brukte denne misoppfatningen, kom fra 10.trinn. Felles for disse fem oppgavene er at det er stor forskjell på gjennomsnittet på 8.trinn og 10.trinn. Forskjellen i gjennomsnitt i tabell 5.31 ser ikke stor ut, men dersom man tar med at en elev bare kunne oppnå 1 poeng på hver oppgave, er bildet litt annerledes.

I to oppgaver er forskjellen på 8.trinn og 10.trinn ikke signifikant med et signifikansnivå på 0,01, mens forskjellen er signifikant med et signifikansnivå på 0,05. Dette gjelder oppgave 4 og 8. I forhold til de fem oppgavene over er forskjellen i gjennomsnitt på resultatet på 8.trinn og 10.trinn noe lavere. På oppgave 4 er forskjellen i gjennomsnitt 0,101 poeng, og på oppgave 8 er den 0,095 poeng. Gjennomsnittet på hele undersøkelsen er 0,430 på oppgave 4, og 0,306 på oppgave 8. Forskjellene vises og kommenteres i følgende diagrammer og kapitler:

- Oppgave 4 (figur 5.6, kapittel 5.2, side 60-64)
- Oppgave 8 (figur 5.16, kapittel 5.8, side 86-91)

Sannsynlighet er et emne hvor misoppfatninger kan være seiglivete. Enkelte misoppfatninger viser lite tilbakegang oppover i skoleløpet, noe som forskere som Batanero og Sanchez (2005) og Green (1986) har dokumentert. De oppgavene som kommer dårligst ut når det gjelder forskjeller i gjennomsnitt og signifikansen er oppgave 1, 2, 7 og 11. Det er tilsynelatende ikke noen bedring i resultatene fra 8.trinn til 10.trinn i disse oppgavene. Det kan likevel være forskjeller på svarene innad i hver oppgave, siden gjennomsnitt og signifikans er regnet ut i forhold til riktig og galt svar. Forskjeller mellom ulike gale forklaringer er beskrevet til hver enkelt oppgave i kapittel 5.

På oppgave 1 er det en noe større andel 8.elever som krysser av for det riktige alternativet. Det er tydelig at det ikke er noen utvikling på dette problemet fra 8.trinn til 10.trinn. Enten er det noe med oppgavens natur eller så er noen av misoppfatningene beskrevet til oppgaven i kapittel 5.1 seiglivete. På denne oppgaven kom det svært mange forklaringer som elevene var enten alene om, eller som de delte med bare et par andre. Oppgaven er kommentert i kapittel 5.1, og vist i figur 5.2 (side 54-60).

På oppgave 2 er det tilnærmet ingen forskjell på andelen riktige svar. Årsaken til at det i oppgave 2 ikke er en bedring fra 8.trinn til 10.trinn, er sannsynligvis at dette var en kontrolloppgave til oppgave 4, og svært få svarte feil på denne oppgaven. Oppgaven var også svært lett, så man kan spørre seg om hvilke elever som faktisk svarte feil på denne oppgaven. En tanke, som ikke kan underbygges empirisk med det tallmaterialet jeg sitter med, er at feilprosenten på denne oppgaven like mye reflekterer antallet elever som gjetter, som de som misoppfatter mengdelære. Oppgaven er kommentert i kapittel 5.2, og vist i figur 5.4 (side 60-64).

Oppgave 7 er av en type som Green nevner spesielt, som handler om hvordan elever forstår begrepet tilfeldighet. Resultatene fra denne undersøkelsen bekrefter langt på vei at misoppfatninger rundt tilfeldighet forandres lite med alder eller formell undervisning i emnet sannsynlighet. Oppgaven er kommentert i kapittel 5.6, og vist i figur 5.14 (side 80-85).

På oppgave 11 er signifikansen 0,93, noe som skulle bety at det er 93 % sjanse for at forskjellen mellom trinnene er tilfeldig. Et moment som også kan virke inn på denne oppgaven, er at få elever svarte riktig på denne oppgaven også, selv om det ikke var like ekstremt som i oppgave 2. Oppgaven ble lagd for å sjekke om elevene har en tendens til å gjøre overfladiske beregninger av utfallsrommet. Det kan synes som dette er noe som ikke forbedres i nevneverdig grad gjennom ungdomstrinnet. Oppgaven er kommentert i kapittel 5.9, og vist i figur 5.22 (101-105).

6 Oppsummering og konklusjon

6.1 Oppsummering av misoppfatningene i undersøkelsen

6.1.1 Formelle og intuitive svar

Til alle oppgavene i oppgavesettet har jeg registrert misoppfatninger. En del av disse misoppfatningene er lette å kjenne igjen fra teorien i kapittel 3, ved at elevene har begrunnet svarene sine på en slik måte at det kommer tydelig frem hvordan de har tenkt. Samtidig er det en del misoppfatninger som er tydelige fordi mange har svart det samme, men hvor det er vanskelig å kategorisere fordi det kommer lite fram hvorfor de har svart som de har gjort.

Elevenes begrunnelser på de forskjellige oppgavene kan grovt sett deles inn i to: de som har besvart/prøvd å besvare oppgaven intuitivt, og de som har svart/prøvd å besvare oppgaven formelt. Med formelt mener jeg da de som har regnet svarene matematisk, eller har brukt matematiske forklaringer. Med intuitivt mener jeg de som svarer ut fra forestillinger, erfaringer eller en følelse av hva som er riktig. Det kan være mange årsaker til at mange elever forsøker å besvare matematikkoppgaver intuitivt. Forklaringene på dette kan være slikt som:

- Elevene har ikke lært nok til å regne det formelt.
- Det kan være enklere og raskere å svare intuitivt.
- Oppgaven føles ikke matematisk nok til at de tenker matematisk.
- Oppgaven ligner på noe de har opplevd.

På noen oppgaver er det en klar utvikling mot formelle svar fra 8.trinn til 10.trinn, mens på andre oppgaver er det ikke en slik utvikling.

6.1.2 Elevenes misoppfatninger av typen heuristisk representativitet

I undersøkelsen var det oppgave 3 og 8 som spesielt skulle avsløre misoppfatninger av typen *representativitet*. Representativitet kan brukes om tilfellene der eleven mener at fordelingen av hendelsene helst skal representere prosessen, eller når eleven mener at en hendelse på en eller annen måte er typisk i forhold til forutgående hendelser. Misoppfatninger av denne typen gikk igjen i noen andre oppgaver i oppgavesettet også.

Når det gjelder misoppfatningene *negativt tilbakeblikk*, *positivt tilbakeblikk* og *base-rate neglect*, så var ingen av oppgavene i oppgavesettet lagd for å fange opp dette. Oppgaver til disse misoppfatningene forsvant ut gjennom piloteringen. Oppgaver til positivt tilbakeblikk og negativt tilbakeblikk som er beskrevet i kapittel 3.5.1.1 (side 29-33) ble gitt til elever helt ned på 6.trinn, og ekstremt få brukte misoppfatninger av disse typene på disse oppgavene. Oppgaver til base-rate neglect ble av lærere i piloteringen forstått som for vanskelige. Likevel kan elever ha hatt misoppfatninger til oppgave 1 som er lik eller ligner på base-rate neglect. Denne misoppfatningen oppstår når to eller flere variabler virker inn på sannsynligheten, og eleven ser bort i fra en fordi den andre virker viktigere. I oppgave 1 var spørsmålet hvilken av krukkene som gir størst sjanse for å trekke en hvit kule. Noen elever beregnet her sannsynligheten ut fra hvor mange hvite kuler det er i hver krukke, uten å ta hensyn til hvor mange sorte kuler det er.

Representativitet:

Til oppgave 3: Elevene skulle finne ut det minste antall lodd de måtte kjøpe for å være helt sikre på å vinne, når ett av ti gir gevinst. Her valgte 153 elever å krysse av ved svaralternativet *10 lodd*, med forskjellige forklaringer av typen *fordi ett av ti lodd gir gevinst.* De kan ikke ha forstått den tilfeldige prosessen det er å trekke lodd i et lotteri, og en misoppfatning som kan ligge til grunn for disse svarene er representativitet. De mener at de ti vinnerloddene fordeler seg jevnt utover, det er jo et lodd for hvert tiende lodd i gjennomsnitt. Noen elever begrunner valget av svaralternativet *55 lodd* med at det burde være nok til å vinne. Det at elevene uttrykker en forventning om en viss fordeling av gevinster, uten å ha gjort noen beregninger på fordelingen, tyder på at de har den samme misoppfatningen.

Til oppgave 8: Elevene skulle avgjøre om å få tre mynt og en kron på fire kast er mer sannsynlig eller like sannsynlig som å få tretti mynt og ti kron på førti kast. Godt over halvparten av elevene svarte her at det er lik sannsynlighet i de to tilfellene. Til sammen hadde 161 elever begrunnet svaret sitt med forklaringer, hvor de enten hadde regnet ut forholdet i begge tilfellene, eller hadde skrevet at de hadde observert at forholdet var det samme. Disse elevene har da ikke forstått *loven om store tall*. De har sett bort fra størrelsen på utvalget i de to tilfellene, og har samtidig sett at de to tilfellene representerer det samme forholdet mellom kron og mynt.

6.1.3 Elevers misoppfatninger av typen heuristisk tilgjengelighet

Heuristisk tilgjengelighet kan brukes om tilfeller der elevene bedømmer sannsynligheten for en hendelse ut fra hvor lett det er for dem å komme på bestemte tilfeller av denne hendelsen. En mengde forskjellige strategier for å løse oppgaver intuitivt i stedet for å bruke formell regning, vil skape slike misoppfatninger. Selv om ingen av oppgavene var lagd spesielt for å avsløre misoppfatninger av typen heuristisk tilgjengelighet, så har elevene brukt misoppfatninger av denne typen ved løsing av flere oppgaver. Spesielt oppgave 6 synes å ha generert en del slike misoppfatninger. Det er vanskelig å kategorisere videre fordi misoppfatningene er svært forskjellige, og de springer jo ut av elevenes egne erfaringer. En del av de forklaringene som jeg har plassert under kategorien *andre forklaringer*, kan lett være av denne typen misoppfatninger. Elever kan lett tenkes å bruke slike misoppfatninger når de ikke har kunnskaper eller evner til formelt å regne eller forstå oppgavene. Elevenes erfaringer er jo forskjellige, derfor blir forklaringsmodellene også svært forskjellige når de bruker tilgjengelighet. I oppgave 6 er det tre misoppfatninger av typen tilgjengelighet som går igjen hos flere elever.

Til oppgave 6:

Her skulle elevene finne ut hvilken sum på to terninger som det er størst sannsynlighet for å få. Alle svaralternativene mellom 0 og 12 var representert i elevenes besvarelser.

"Vanlig å få": Med unntak av svaret 10 har elever valgt alle mulige svar mellom 2 og 12, med begrunnelsen at det er vanlig å få det tallet. De har altså brukt den samme misoppfatningen, med den samme forklaringen, men tallene elevene velger er likevel svært forskjellige. Denne misoppfatningen kan gi bra resultat for elevene i enkelte tilfeller, alt etter hvor stort erfaringsgrunnlag de har. Ti elever har brukt denne begrunnelsen for valget av det riktige svaret, mens ti andre har brukt denne begrunnelsen til å velge 6 eller 8. Jo større erfaringsgrunnlag de har fra den aktuelle situasjonen, jo større mulighet har de til å komme i nærheten av riktig svar.

"Midt i mellom": 32 elever begrunnet valget av svaret 6 med at 6 er midt i mellom, eller halvparten av 12. To elever valgte til og med svaret 3 med begrunnelsen at det er halvparten av 6. Elevene kan ha tenkt at det er trygt å velge noe midt i, eller så har de erfaringer med situasjoner hvor resultatene fordeler seg etter normalfordeling. Det er uansett et uttrykk for en erfaring om hva som er vanlig.

"Det er størst": Av de 29 elevene som valgte svaret 12, så har 19 av dem begrunnet svaret med at 12 er det største tallet. Erfaringen elevene baserer dette valget på kan synes å være at man i spill ofte vinner med det største tallet.

En del misoppfatninger til de ulike oppgavene i undersøkelsen er det bare en elev som har hatt, samtidig som det er tydelig at misoppfatningene er av typen heuristisk tilgjengelighet. Her er et par eksempler på det:

- "For det fikk Ellen en gang ho gjorde det" (elev #108, jente, 8.trinn, til svaralternativ 1 oppgave 8).
- "Fordi når man slår kron og mynt så er det ikke alltid at du har flaks." (elev #147, jente, 8.trinn, til svaralternativ 1 oppgave 11).

6.1.4 Tilpassing og forankring

Tilpassing og forankring brukes som begrep i følge Tversky og Kahneman (1974) når elevene gjør mangelfulle sannsynlighetsberegninger ved at de tar utgangspunkt i en opplysning, og justerer beregningen ut fra opplysninger i problemet. To typer misoppfatninger, konjunksjonsfeil og disjunksjonsfeil, til kategorien tilpassing og forankring er forklart i kapittel 3.5.1.3 (side 34-35). Konjunksjonsfeil er når eleven tror at sannsynligheten for at to hendelser skjer er større enn at en av hendelsene skjer, altså når eleven i sin forståelse av oppgaven ikke har tatt hensyn til loven om konjunksjon (se kapittel 3.5.1.3). Oppgave 2 og 4 ble lagd for å avsløre om konjunksjonsfeil oppstår i større grad i sosiale settinger enn i matematiske. I oppgave 2 er det brukt terninger i problemet for at det skal være gjenkjennelig som en matematisk setting. Elevene skulle i oppgave 2 avgjøre hva som er mest sannsynlig: å få to seksere på rad, eller å få en sekser. Oppgave 4 er bygd opp på samme vis som oppgave 2, med en lignende problemstilling, bare i en sosial setting. Elevene skulle her avgjøre hva som er mest sannsynlig: om Marie studerer til å bli veterinær, eller om Marie er student. Disse to oppgavene skiller seg fra resten av oppgavene i undersøkelsene ved at elevene ikke ble bedt om å begrunne svarene. Andre misoppfatninger enn konjunksjonsfeil kan være årsak til noen av de gale avkryssingene. Svært få elever krysset av feil i oppgave 2. Hele 91,7 % av de 484 elevene i undersøkelsen krysset av på det riktige alternativet. På oppgave 4 er bildet noe annerledes, der har bare 43,0 % av elevene i undersøkelsen svart riktig. Med utgangspunkt i dette kan det synes som om påstanden om at konjunksjonsfeil har større tilbøyelighet til å oppstå i sosiale settinger enn i matematiske, er riktig. Spørsmålet er om misoppfatningen konjunksjonsfeil i de to oppgavene er den samme misoppfatningen, eller om det kan regnes som to forskjellige misoppfatninger. Dersom det hadde vært den samme misoppfatningen i begge oppgavene, kunne man forvente at de som svarte feil i den ene oppgaven var overrepresentert blant de elevene som hadde svart feil på den andre oppgaven. Dette er ikke tilfellet blant de som svarte feil i oppgave 1. De 29 elevene, som valgte svaret *du får to seksere på rad* på oppgave 1, hadde omtrent den samme fordelingen av riktige og feil svar på oppgave 2 som resten av elevene. Dette kan tyde på at det er en annen årsak til at elever gjør konjunksjonsfeil i sosial setting, ikke bare at det er en forsterkning av samme årsak.

6.1.5 Elevers forståelse av tilfeldighet

Mange av oppgavene, spesielt oppgave 1, 3, 5 og 7, tester elevenes forståelse av hva som er tilfeldighet. En del av det som kom fram gjennom besvarelsene til disse oppgavene avslører at mange elever mangler grunnleggende forståelse for tilfeldighet i vanlige situasjoner i spill og dagligliv. Selv om noen av de andre oppgavene i settet ikke er laget for å avsløre dette, så vil en slik manglende forståelse virke inn på svarene også her.

Mange elever viser liten forståelse for begrepet forhold, som er grunnleggende for å forstå begreper innen sannsynlighet. Dette kom for eksempel til uttrykk i oppgavene 1 og 5. Forklaringene disse elevene kom med der gikk ut på at de vurderte forholdet ut fra hvilket element som var størst, minst, flest eller færrest. I oppgave 1 var det over 25 % av elevene som gav ulike forklaringer som hadde det til felles at de avslørte manglende vurdering av forholdet mellom de sorte og hvite kulene i de to krukkene. I oppgave 5 hadde nesten hver femte elev begrunnet svaret sitt med forklaringer som viste at de hadde vurdert forholdet mellom feltene på de to lykkehjulene på feil måte. I stedet for å se at feltene på de to lykkehjulene var like store til sammen, så har noen svart lykkehjul A *fordi feltene er størst der*, eller *fordi det er færre felter der*. Noen har svart lykkehjul B *fordi det er flere felter der*, eller *fordi feltene er spredt der*. Ved å gjøre slike overfladiske sannsynlighetsberegninger i disse to oppgavene viser elevene at de ikke har en utviklet forståelse av tilfeldighet eller forhold. De har en uklar forståelse av sammenhengen mellom hva som trekkes og prosessen i trekningen.

Oppgave 7, som var av lignende type som den Green (1986) brukte i sin undersøkelse, ble brukt spesielt for å teste elevenes forståelse av begrepet tilfeldighet. Det ble vist at mange elever har misoppfatninger rundt begrepet tilfeldighet. Det var spesielt to typer misoppfatninger, hvor elevene bevisst eller ubevisst har lett etter et mønster, som ble påvist gjennom elevenes besvarelser. Den ene er representert hos de elevene som har funnet et mønster på et av de gale svaralternativene, og derfor har valgt det svaralternativet. Den andre misoppfatningen finnes hos de som har lett etter et alternativ hvor dråpene er spredt mest mulig utover, og dermed krysset av feil fordi det å lete etter størst mulig spredning er å lete etter et mønster i seg selv.

Tiendeklassingene i undersøkelsen hadde lavere svarprosent på det riktige alternativet i oppgave 7 enn åttendeklassingene. Spesielt var det få elever fra 10.trinn som valgte det riktige alternativet med begrunnelsen om at det så mest tilfeldig ut der, eller at det var minst mønster der. Dette stemmer bra med erfaringene til Green (1986) om at det er liten forbedring på en slik oppgave med høyere alder.

6.1.6 Elevers problemer med betinget sannsynlighet

De tre siste oppgavene i undersøkelsen, oppgave 9, 10 og 11, testet blant annet elevenes tanker når de blir gitt tilleggsopplysninger som har innvirkning på sannsynligheten i en oppgave. To av de tre eksemplene på misoppfatninger til betinget sannsynlighet som Ruma Falk (1986) trekker fram, og som er beskrevet i kapittel 3.5.3 (side 37-39), er representert i svarene til disse oppgavene. Dette er *Falkfenomenet* og *problemer med å definere antall utfall når eleven blir gitt opplysninger som påvirker antall utfall.*

Falkfenomenet:

På oppgave 10 var det 26 elever, eller 5,4 % av elevene i undersøkelsen, som svarte at den andre trekningen ikke har noen innvirkning på noe som allerede har skjedd. Misoppfatningen Falkfenomenet er dermed påvist blant elevene i denne undersøkelsen, selv om antallet som svarer slik ikke er på langt nær så høyt som i Falks egen undersøkelse. Falk (1986) hevder at et flertall av elevene brukte en slik misoppfatning på et lignende problem. Det er noen tydelige forskjeller mellom Falks undersøkelse og min. Det ene er forskjeller i elevgruppenes erfaringer og kunnskaper, siden Falk gav sin oppgave til 88 studenter på universitetet. Min versjon av problemet gjennom oppgave 9 og 10 er også noe vanskeligere enn den Falk testet. Mine oppgaver dreide seg om 52 kort og 13 av hjerter eller kløver, hvor de i oppgave 10 blir bedt om å finne hva sannsynligheten i den første trekningen er, når du vet at andre trekning gir en kløver. Utgangspunktet i Falks oppgaver var en krukke med to hvite og to sorte kuler, hvor elevene i den andre oppgaven ble bedt om å finne sannsynligheten for å trekke hvit kule i første trekning, når du vet at det ble hvit kule i andre trekning. Antallet elever som gir svar preget av denne misoppfatningen er overraskende lavt, med tanke på at elevene er på et lavere nivå, og oppgavene er noe vanskeligere. Et resultat i min undersøkelse er ikke nevnt i Falk (1986), eller i omtalen om hans forsøk i Batanero, Sanchez (2005) og Shaughnessy, Bergman (1993). I min undersøkelse er flertallet som bruker denne misoppfatningen de eldste elevene. Av de 26 elevene er 20 elever på 10.trinn. Siden antallet elever som skrev ned forklaringer av denne typen er forholdsvis få, så er det usikkert om dette representerer en trend eller er spesifikt for elevene i denne undersøkelsen.

Problemer med å definere antall utfall når eleven blir gitt opplysninger som påvirker antall utfall:

Et overveldende flertall på 77,3 % har på oppgave 11 svart det første svaralternativet – 1/2. Det var dette svaralternativet elevene som har problemer med å definere utfallet i oppgaven var forventet å svare. Resultatet fra undersøkelsen bekrefter langt på vei at mange elever har en misoppfatning der de vurderer utfallsrommet overfladisk. De har forstått at muligheten mynt/mynt nå er uaktuell, og de tror dermed at det er to muligheter igjen, nemlig mynt/kron og kron/kron. Elevene har dermed oversett et utfall. Inne i det store antall svar på det første svaralternativet ligger det helt sikker en del andre misoppfatninger også, som representativitet, tilgjengelighet og lik sannsynlighetsfeil. Men forklaringene til disse elevene var gjerne korte og gav liten distinksjon mellom misoppfatningene, noe som gjør det vanskelig å si hvor stor andel av elevene som har brukt hvilke misoppfatninger.

6.1.7 Lik sannsynlighetsfeil

Bare en av oppgavene i undersøkelsen ble lagd for, blant annet, å avsløre feil av typen *lik sannsynlighetsfeil* slik det er beskrevet i kapittel 3.5.4 (side 39). Denne misoppfatningen kommer til uttrykk i oppgave 6. I forklaringene til oppgavene 1, 2, 4, 7, 8 og 11 er det likevel elever som kan ha svart som de har gjort med utgangspunkt i denne misoppfatningen. De kan ha beregnet intuitivt sannsynligheten mellom hendelsene eller svaralternativene til å være lik, selv om hendelsene i disse oppgavene har ulik sannsynlighet.

Oppgave 6: Her har 24 elever valgt ikke å velge et tall, med begrunnelsen at det er det samme hvilke tall man velger, at det er lik sannsynlighet for å få tallene. Noen av dem har forstått at tallene 0 og 1 ikke er mulig med to terninger, og de har da begrenset svaret sitt noe, til at det er lik sannsynlighet for å få tallene fra 2 til 12. I tillegg har tre elever brukt samme forklaring selv om de har valgt et tall. Disse elevene har åpenbart vurdert sannsynligheten for at ulike hendelser skal skje til å være lik når den ikke er lik. Altså har de en misoppfatning av typen lik sannsynlighetsfeil.

Elevenes begrunnelser avslører ikke årsaken til at de feilaktig vurderer sannsynligheten for å være lik. To mulige årsaker er at de enten ikke klarer å vurdere antall utfall, eller at de baserer seg på erfaring, eller en kombinasjon av de to. Den ene årsaken kan være at de ikke klarer å se at ulike kombinasjoner av de to terningene gir det samme tallet, og det kan da se ut som om det bare er ett utfall til hvert tall. Mer eller mindre intuitivt kan de da komme til konklusjonen at sannsynligheten er lik. Den andre mulige årsaken er at elevene gjør en intuitiv vurdering basert på erfaringer fra lignende problemer. Slike erfaringer kan komme fra innføringen i uniform sannsynlighet på skolen hvor elevene gjerne jobber med problemer der det gjerne er lik sannsynlighet mellom hendelsene. Dersom elevene tenker slik som i den andre mulige årsaken, er dette en variant av *heuristisk tilgjengelighet*.

Oppgave 8: Et flertall av elevene svarte det gale svaralternativet: *begge eksemplene er like sannsynlige*. Mange elever har her brukt *representativitet* ved at de har regnet eller beregnet sannsynligheten i de to eksemplene, for så å se at det samme forholdet mellom kron og mynt er representert i begge eksemplene. 13 elever har valgt at begge eksemplene i oppgave 8 er like sannsynlig, med begrunnelsen at det er tilfeldig om du får kron eller mynt. Disse elevene kan ha en misoppfatning av typen lik sannsynlighetsfeil, siden de bare uttrykker en intuitiv forståelse av at sannsynligheten er lik i tilfeller med kron og mynt.

Oppgave 2 og 4: På disse oppgavene skulle ikke elevene begrunne svarene sine. Her har ni elever på oppgave 2 og tre elever på oppgave 4 vurdert sannsynligheten mellom de to svaralternativene til å være lik, ved å krysse av på begge svaralternativene. Det er rimelig å anta at det ligger til grunn *lik sannsynlighetsfeil* for det aktive valget å krysse av for begge svaralternativene.

Oppgave 11: Denne oppgaven ble lagd for først og fremst å kontrollere om elevene har misoppfatninger til betinget sannsynlighet. Begrunnelsene var så korte at det var vanskelig å skille mellom ulike misoppfatninger. Likevel er det mange besvarelser som bare uttrykker en intuitiv forståelse. 374 elever valgte svaralternativet 1/2, og av disse har 163 elever gitt forklaringer som går ut på at sannsynligheten er lik når du slår kron og mynt. Trolig ligger lik sannsynlighetsfeil til grunn for mange av disse svarene.

Andre oppgaver: Det er en del svar på de ulike oppgavene som elever er alene om, der lik sannsynlighetsfeil kan være brukt. For eksempel den eleven som valgte å krysse av for alle tre alternativene i oppgave 7, eller de tre elevene som regnet riktig i oppgave 1, men valgte likevel å krysse av for alternativet: *det er lik sjanse i begge krukkene.*

6.1.8 Løsningstilnærming

Elever som bruker løsningstilnærming svarer på oppgaven ut fra at de skal forutse resultatet av én hendelse. De har ikke forstått at sannsynligheten er et uttrykk for fordelingen av mulige hendelser. Konold (1989) kom til at elever brukte en slik misoppfatning når de forsøkte å løse problemer på en dagligdags måte i stedet for å bruke kunnskaper fra matematiske disipliner. Svar hvor løsningstilnærming er brukt, vil gjerne være av typen *intuitive svar* slik jeg har beskrevet det i kapittel 6.1.1 (side 116). Dersom elevene har gjort beregninger eller vurderinger av antall utfall i forskjellige hendelser, er det mindre trolig at de har sett det som sin oppgave å spå resultatet av én hendelse.

Ingen av oppgavene i undersøkelsen ble lagd for å avsløre denne misoppfatningen. Med unntak av noen forklaringer til oppgave 3 viser ikke elevenes forklaringer tydelig at de bruker denne misoppfatningen. Likevel kan denne misoppfatningen være årsak eller delårsak til mange gale svar på flere oppgaver. En kategori begrunnelser, som går igjen til nesten alle svarkategoriene i alle oppgavene, er *ser slik ut* – svar. Dette er svar hvor eleven på ulike vis bare konstaterer hva de mener er riktig. Selv om det er vanskelig å si sikkert, uten å intervjue elevene som har svart slik, er det lett å tenke seg at løsningstilnærming kan være årsak til en del av disse svarene.

Oppgave 5 er den oppgaven som kom nærmest i å avsløre denne misoppfatningen hos elevene. 36 elever begrunnet valget av svaralternativet *55 lodd* med at det var nok til å vinne sikkert eller nok til at man burde vinne. I kapittel 5.3.2 (side 68) blir det sitert to elever, som har valgt dette svaralternativet, fordi de mener det er større sannsynlighet for å få gevinst enn ikke å få gevinst med dette alternativet. Med andre ord at de har vurdert hvilket av svarene som er mest ”riktig”.

6.1.9 Kombinatorikk

I undersøkelsen er det i oppgavene 6 og 11 at elevene får bruk for kunnskap om kombinatorikk. I oppgave 6 skulle elevene finne antallet kombinasjoner med de to terningene som gav de forskjellige resultatene, mens i oppgave 11 måtte de finne utfallsrommet til to kronestykker. For begge oppgavene gjelder at et flertall av elevene ikke har forstått at de trenger å finne antall kombinasjoner med henholdsvis terninger og kronestykker. Et flertall har altså ikke forstått at de skal bruke kombinatorikk. Noen av de elevene som har forstått kombinatorikkdelen av oppgavene har brukt et par av misoppfatningene beskrevet i kapittel 3.3. Flere av misoppfatningene som ble beskrevet, er ikke representert i elevforklaringene. Foruten det opplagte, at ingen av oppgavene i undersøkelsen ble lagd for spesielt å avsløre misoppfatninger til kombinatorikk, kan dette skyldes slikt som:

- Kombinatorikkdelen i oppgavene i undersøkelsen hadde lav vanskegrad. Flere varianter av misoppfatninger til kombinatorikk krever høyere vanskegrad på oppgavene.
- Få oppgaver i undersøkelsen inneholdt elementer av kombinatorikk. Bare to oppgaver kan avsløre misoppfatninger innen kombinatorikk.
- Mange elever har ikke forstått at man må bruke kombinatorikk i de to oppgavene. Fokus i oppgavene er på sannsynlighet, og på om elevene forstår at de skal finne utfallsrommet. Elevene blir ikke eksplisitt bedt om å finne kombinasjoner.

Kombinatorikkdelen i de to oppgavene er enkle varianter av *utvelgelsesmodellen*. Av de misoppfatningene til kombinatorikk, som er beskrevet i kapittel 3.3 (side 25-27), er det bare misoppfatningen *usystematisk oppramsing* som utvetydig er påvist.

Ni elever har på oppgave 6 valgt svaret 8, med forklaringer der de setter opp ulike kombinasjoner som gir 8. Fire elever har satt opp kombinasjoner som gir svaret 6. I tillegg er det en del elever som velger disse svarene med begrunnelsen at det er mange kombinasjoner som gir det svaret, henholdsvis seks til svaret 8 og femten til svaret 6. Disse elevene kan ikke ha brukt en systematisk metode som fører til alle kombinasjonene, de har mest sannsynlig brukt en prøve- og feilemetode: usystematisk oppramsing. Den samme misoppfatningen kan ha blitt brukt i oppgave 11. Selv om de fleste forklaringene til svaralternativet ½ på oppgave 11 var korte, så er det elever her som har oversett ett av de mulige utfallene, og som derfor ikke kan ha brukt en systematisk metode for å finne utfallene.

En misoppfatning jeg hadde forventet til oppgave 11 var *feil bruk av trediagram*. Alle elevene på 10.trinn har fått undervisning i trediagram minst to ganger. På oppgave 11 var det ingen elever som brukte trediagram i forklaringen sin!

6.2 Konklusjon

I denne masteroppgaven har jeg sett på misoppfatninger innen emnet sannsynlighet, blant elever i 8.trinn og 10.trinn fordelt på fire ungdomsskoler. Jeg har gjennom et oppgavesett ønsket å påvise et utvalg av misoppfatninger til sannsynlighet. Hovedproblemstillingen i oppgaven har vært:

- Hvilke misoppfatninger kan elever i ungdomsskolen ha til emnet sannsynlighet?

Underveis i analysen og diskusjonen rundt elevforklaringene til den enkelte oppgave, og i oppsummeringer, har jeg kommet inn på følgende problemstillinger:

- Hvorfor får elevene slike misoppfatninger?
- Finner jeg de samme tendensene i min undersøkelse som er påvist i tidligere forskning?
- Er det forskjeller på svarene til elevene i 8.trinn og 10.trinn?

Misoppfatningene som er påvist i undersøkelsen er diskutert i kapittel 5, og i all hovedsak oppsummert i kapittel 6.1 (side 116-127). Noen oppgaver var egnet for å avsløre bestemte misoppfatninger, mens andre oppgaver avslørte en stor mengde ulike misoppfatninger.

Gjennom elevenes forklaringer i undersøkelsen, på hvorfor de har valgt akkurat ett bestemt svaralternativ, kommer det fram at det er svært mange årsaker til at de får slike misoppfatninger som er påvist i undersøkelsen. Det at elevene tar i bruk misoppfatninger, og at årsakene til disse misoppfatningene er mange og varierte, mener jeg er som forventet. Oppgavene i oppgavesettet er lagd for å avsløre misoppfatninger jeg har erfaringer med, eller som er beskrevet i litteraturen. Tross alt vil mange elever svare feil når oppgavene er lagd til emner og problemstillinger man vet at mange elever sliter med. Det er vanskelig å avgjøre om misoppfatningene elevene viser, er et uttrykk for en trygg overbevisning om at de svarer riktig, eller om det er et utslag av et famlende forsøk på å svare på problemstillingen.

Selv om tilstedeværelsen av misoppfatninger til de forskjellige oppgavene blir påvist gjennom ordlyden i elevenes forklaringer, og det at flere elever har tenkt likt, er det ikke like lett å påvise årsaker til at misoppfatningene oppstår. I noen tilfeller har det vært mulig å se tydelige sammenhenger mellom årsaken til misoppfatningen og selve misoppfattelsen, mens i andre tilfeller har jeg bare kunnet diskutere mulige årsaker. Jeg har diskutert dette til hver enkelt oppgave i kapittel 5, og det er mulig å trekke noen konklusjoner.

Alle misoppfatninger er knyttet til elevens erfaringer fra lignende situasjoner eller problemstillinger. Hvor relevante elevens bruk av egne erfaringer er, kommer helt an på hvor mye kunnskap eleven sitter inne med, og hvor vant elevene er til lignende situasjoner. Med bakgrunn i at elevene bruker intuitive og formelle forklaringer (se kapittel 6.1.1, side 116), er årsaken til mange misoppfatninger at elevene enten forsøker å svare ut fra dagligdagse erfaringer, eller at de bruker eller forsøker å bruke matematisk kunnskap til å løse problemstillinger denne kunnskapen ikke er beregnet for. Elevene bruker intuitive forklaringer når de enten ikke har formell kunnskap nok til å kunne svare på oppgaven, eller når det faller mer naturlig for eleven å bruke erfaringer fra situasjoner som føles lignende. Elever bruker formelle forklaringer når de mener at situasjonen ligner på situasjoner de har opplevd i matematikkfaget tidligere, og de bruker da regning de har opplevd at har fungert tidligere.

Nesten alle misoppfatningene som ble beskrevet i kapittel 3.5, og alle misoppfatningene som oppgavene ble lagd for å avsløre, ble påvist gjennom elevenes besvarelser. Misoppfatningene som er undersøkt internasjonalt av forskere som Green (1986), Tversky og Kahneman (1974), Batanero og Sanchez (2005), Shaughnessy og Bergman (1993), Fischbein og Schnark (1997), Konold (1989), Falk (1986), eksisterer også hos norske elever. Noen misoppfatninger er ikke like utbredt blant elevene i min undersøkelse, som i undersøkelsene til disse forskerne. Et eksempel på dette er *Falkfenomenet*, hvor få elever i min undersøkelse har brukt denne misoppfatningen. Det er vanskelig å si om dette er uttrykk for en trend eller ikke, siden oppgaven ikke var helt lik og siden hverken Falks undersøkelse eller min har utvalg som kan sies å være representative for populasjonen.

Det at akkurat de samme misoppfatningene som finnes blant norske elever også finnes blant elever i andre land, sier noe om allmenngyldigheten av disse misoppfatningene. Det at elevene tyr til de samme misoppfatningene i møte med oppgaver i sannsynlighet hinter om at årsakene er mer knyttet til prosessen å lære sannsynlighet enn til kultur og språk. Man kan anta at disse misoppfatningene er en del av en naturlig prosess rundt det å lære sannsynlighet. For lærere blir da kjennskap til disse misoppfatningene viktig for å kunne hjelpe elever til å komme forbi slike misoppfatninger.

Man burde forvente at både undervisning og modning har innvirkning på omfanget av misoppfatningene. Siden sannsynlighet er et emne elevene får undervisning i flere ganger i løpet av ungdomsskolen, og fordi elevene blir eldre, burde man forvente at misoppfatningene avtar i løpet av ungdomsskolen. Dette er riktig, i varierende grad, for en del misoppfatninger i undersøkelsen. Det er likevel noen unntak hvor det har vært liten eller ingen bedring i løpet av disse årene. Det finnes altså misoppfatninger til emnet sannsynlighet som er svært motstandsdyktige mot formell undervisning, og som forteller oss at det trolig er noe spesielt med emnet sannsynlighet som skaper slike misoppfatninger. Oppgave 1 hvor elevene skulle trekke kuler fra to krukker og oppgave 7 hvor elevene skulle forholde seg til begrepet tilfeldighet, er to eksempler fra undersøkelsen hvor det er lite eller ingen bedring fra 8.trinn til 10.trinn. Dette stemmer bra med det Green (1982 og 1986) kom fram til i sine undersøkelser hvor han brukte lignende oppgaver.

Batanero og Sanchez (2005) henviser til Borovcnik og Peard når de hevder at sannsynlighet skiller seg fra andre emner innen matematikken. At selv på grunnleggende nivå innen sannsynlighet, kan ikke fenomener forklares enkelt ut fra logikk og hverdagsforstillinger.

”Borovcnik and Peard (1996) remark that probabilistic reasoning is different from logical or casual reasoning and that counterintuitive results are found in probability even at very elementary levels. By way of contrast, in other branches of mathematics counterintuitive results are encountered only when working at a high degree of abstraction.”

(Batanero, Sanchez, 2005)

Dette forklarer et stykke på vei at misoppfatninger til enkelte emner innen sannsynlighet ikke avtar i stor grad oppover i skolesystemet. Undervisning i emnet sannsynlighet innebærer derfor en stor utfordring siden en del misoppfatninger til dette emnet ikke forsvinner med tradisjonell undervisning. Diagnostisk undervisning kan være en løsning på disse utfordringene, siden denne undervisningsformen er spesielt utarbeidet for å imøtegå og løse misoppfatninger eller avklare delvis utviklede begreper.

7 Litteraturliste

Batanero, C., Henry, M., Parzysz, B., (2005), The nature of chance and probability, Jones, G.A.(ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Springer.

Batanero, C., Sanchez E., (2005), High school students' conceptions and misconceptions about probability, *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Springer.

Bell, Alan, (2007), Introduce diagnostic teaching, www.toolkitforchange.org

Brekke, Gard, (1995), Kartlegging av matematikkforståelse – Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk, Nasjonalt læremiddelsenter.

Dubois, J.G., (1984), A system of simple combinatorial configuration, *Educational Studies in Mathematics 15.*

English, Lyn D., (2005), Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning, *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Springer.

Eriksen, T.B., (1985), *Filosofi og vitenskap fra antikken til vår tid,* Universitetsforlaget.

Falk, R., (1986), Conditional probabilities: Insight and difficulties, *2nd International Conference on Teaching Statistics,* www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots2/Falk.pdf, (10. mar 2008)

Fischbein, E., Schnarch, D., (1997), The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education, 28.*

Fisher, R. A. (1925), *Statistical Methods for Research Workers*, Oliver and Boyd.

Freudenthal, H., (1973), Mathematics as an educational task, Reidel Publishing Companny.

Fuglestad, Anne Berit, (2003), Konstruktivistisk perspektiv på datamaskiner i matematikkundervisning, i Grevholm B. (red.), *Matematikk for skolen*, Fagbokforlaget.

Gjone, G., Nortvedt G. A., (2001), Veiledning til geometri. F og I, Nasjonalt læremiddelsenter.

Green, D.R., (1986), Children's understanding of randomness: report of a survey of 1600 children aged 7-11 years, *2nd International Conference on Teaching Statistics, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots2/Green-2.pdf*.

Green, D.R., (1982), A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years, *In Proceedings of ICOTS I*, University of Sheffield

Gulbrandsen, J.A, Melhus, A., Løchsen, R., (2006), Nye mega 8b - Matematikk for ungdomstrinnet, N.W. Damm & søn.

Imsen, Gunn, (2005), Elevens verden – innføring i pedagogisk psykologi, Univeritetsforlaget

Johansen, Ole Harald (2001), Misoppfatninger i matematikk blant elever i Namibia og Norge, Digitale utgivelser ved Universitetet i Oslo.

Jones, G.A., Thornton, C.A., (2005), An overview of research into the teaching and learning of probability, *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Springer.

Kleven, T. A. (2002). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode. En hjelp til kritisk tolkning og vurdering*. Unipub forlag.

Konold, C., (1991), Understanding students' beliefs about probability, *Radical constructivism in mathematics education*, Kluwer

Kunnskapsdepartementet, (2000), Studenter med spesifikke lese-, skrive- eller matematikkvansker, www.regjeringen.no

Kunnskapsdepartementet, (2006), Læreplanverket for kunnskapsløftet, midlertidig utgave juni 2006, Utdanningsdirektoratet.

Lie, S., Caspersen M. L. (2004), *Innføring i SPSS. Mange gode råd og vink for nybegynnere*, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling.

Lie, S., Caspersen M. L. (2004), *Nasjonale prøver på prøve*, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling.

Lund, T., Chritophersen K. A. (1999), *Innføring i statistikk*, Universitetsforlagets Metodebibliotek.

Narum, Eskild (2007), Data i geometriundervisningen, Digitale utgivelser ved Universitetet i Oslo.

Nilssen Fossland, Torunn I. (1993): Konstruktivisme i klasserommet. Hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling. Universitetet i Oslo.

Osborne, J. F., (1996), Beyond constructivism, Science & Education 80.

Piaget, J., & lnhelder, B., (1975), The oriqin of the idea of chance in children, Routledge & Kegan Paul.

Pratt, D., (2005), How do teachers foster students understanding of probability, Jones, G.A.(ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer.

Ringstad, Eva K. D., (2007), Geofag i fokus, Digitale utgivelser ved Universitetet i Oslo.

Robson, C. (2002), Real world research second edition, Blackwell Publishing.

Shaughnessy, J.M., (1977), Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level, *Educational studies in mathematics 8*, D. Reidel Publishing Company.

Shaughnessy, J.M., Bergman, B., (1993), Thinking about uncertainty: probability and statistics, *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, Macmillian.

Sierpinska, A., (1994), *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press.

Sjøberg, Svein, (2004), Naturfag som allmenndannelse – en kritisk fagdidaktikk, Gyldendal.

Steinle, V., Stacey, K., Chambers, D. (2006), Teaching and Learning about Decimals CD-rom v3.1, University of Melbourne.

Tversky, A., Kahneman, D., (1974), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases, *Science*, 185.

Universitetet i Oslo i samarbeid med Språkrådet, (2005), Bokmålsordboka, Kunnskapsforlaget.

www.marilynvossavant.com/articles/gameshow.html (11.mar 2008)

www.wikipedia.com, 5.okt.2007

8 Vedlegg

Vedlegg 1: oppgavesett med diagnostiske oppgaver brukt i undersøkelsen.

Vedlegg 1

Navn:____________________

Klasse:____________________

Skole:____________________

Sannsynlighet

<u>Oppgave 1</u>

Du har to krukker med sorte og hvite klinkekuler. Det er ikke mulig å se kulene når du trekker.
Hvilken av krukkene under gir størst sjanse for å trekke en hvit kule?

A B

- ☐ A gir størst sjanse.
- ☐ B gir størst sjanse.
- ☐ Det er lik sjanse i begge krukkene.

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

<u>Oppgave 2</u>

Du leker med en terning, og du ønsker å få seksere.
Kryss av ved det du synes er mest sannsynlig.

- ☐ Du får to seksere på rad.
- ☐ Du får en sekser.

Oppgave 3
I et lotteri er det 100 lodd. Et av ti lodd gir gevinst.

Hva er det minste antall lodd du må kjøpe for å være helt sikker på å få minst en gevinst?

- ☐ 10 lodd.
- ☐ 55 lodd
- ☐ 91 lodd
- ☐ 100 lodd

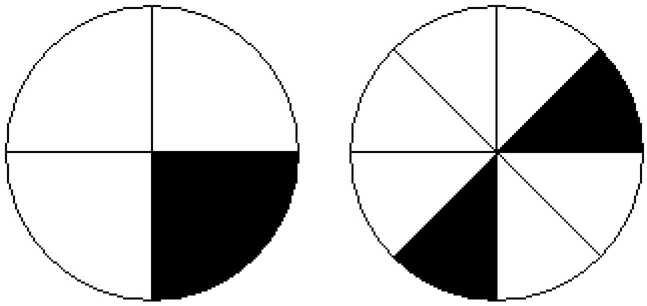
Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 4
Marie har alltid vært interessert i dyr, og hun rir mye. Faren hennes er veterinær. Før hun begynte å studere, da hun gikk på ungdomsskolen og på videregående skole, var hun i stallen nesten hver dag.
Kryss av ved det som er mest sannsynlig:

- ☐ Marie studerer til å bli veterinær.
- ☐ Marie er student.

Oppgave 5

Både lykkehjul A og B gir gevinst når viseren stopper på sort felt.



A B

Hvilken påstand er riktig:

- ☐ Du har størst vinnersjanse med lykkehjul A.
- ☐ Du har størst vinnersjanse med lykkehjul B.
- ☐ Du har like stor sjanse på begge lykkehjulene.

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 6

Du skal spille et spill. Spillet går ut på at deltakerne først velger ett tall fra 0 til 12. Så kastes to terninger. Antall øyne på de to terningene legges sammen. Den som gjetter riktig vinner.

Spørsmålet er da: Hvilket tall bør du velge for å ha størst sjanse til å vinne?

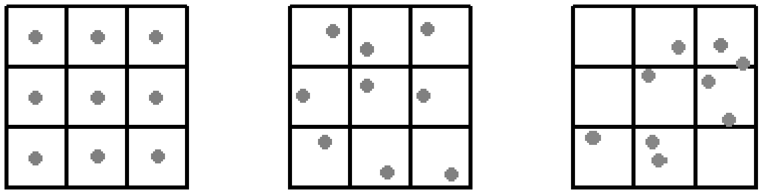
Svar:___________

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 7

En gutt har lekt med treklosser ute. Da han slutter å leke har han satt sammen ni klosser til et kvadrat. Etter en stund begynner det å regne. Det du skal tenke på er hvor de ni første regndråpene som treffer klossene havner. Under er det tegnet tre mulige forslag.

Etter at ni dråper har falt, hvilke av de tre forslagene under ser mest ut slik du vil forvente?



A B C

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 8

Marthe slår kron og mynt fire ganger. Hun får 3 mynt og 1 kron.
Kristoffer slår også kron og mynt, men holder på lenger. Han slår 40 ganger, og får resultatet 30 mynt og 10 kron.

Du skal nå avgjøre hvilke av disse to eksemplene som er mest sannsynlig.

☐ Det er mest sannsynlig at Marthe får 3 mynt på 4 kast.

☐ Det er mest sannsynlig at Kristoffer får 30 mynt på 40 kast.

☐ Begge eksemplene er like sannsynlig.

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 9

Det er en kortstokk med 52 kort på bordet foran deg. Det er 13 kort av hver type – hjerter, spar, kløver og ruter. Du trekker et kort med hjerter, og legger det ikke tilbake i stokken. Hva er sannsynligheten for å trekke et kort med hjerter fra kortstokken nå?

Kryss av ved det alternativet du mener er riktig:

☐ $\frac{13}{52}$

☐ $\frac{12}{52}$

☐ $\frac{12}{51}$

☐ $\frac{13}{51}$

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 10

Som i oppgave 9 har du en kortstokk med 52 kort på bordet foran deg. Du trekker et kort og legger det til side uten å se på det. Du trekker så et kort til. Hva er sannsynligheten for at det første kortet er kløver, hvis du vet at det andre kortet er kløver?

Kryss av ved det alternativet du mener er riktig:

☐ $\frac{13}{52}$

☐ $\frac{12}{52}$

☐ $\frac{12}{51}$

☐ $\frac{13}{51}$

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde:

Oppgave 11

En lærer slår kron og mynt med to kronestykker uten at du ser resultatet. Læreren innrømmer at det ble minst en kron.

Hva er sannsynligheten for at det ble kron på det andre kronestykket også?

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{2}{3}$

Forklar kort hvorfor du svarte som du gjorde: